SZTUCZNA INTELIGENCJA

ZBIORY ROZMYTE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości" w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Klasyczne pojęcie zbioru związane jest z logiką dwuwartościową (Boole'a). Dla każdego zbioru A zawartego w pewnym zbiorze X istnieje funkcja $f_A : X \to \{0, 1\}$, która określa, czy dany element $x \in X$ należy do A, czy też nie:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A \end{cases}$$

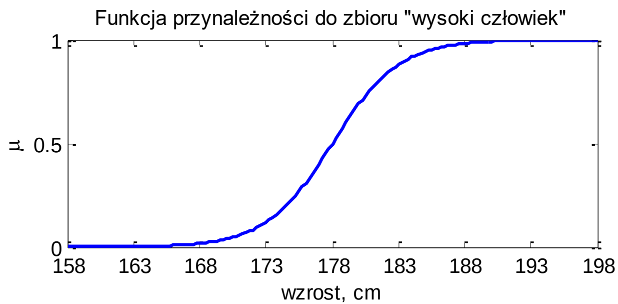
W przypadku zbiorów rozmytych elementom x przypisuje się stopień przynależności do zbioru A. Funkcja przynależności odwzorowuje elementy zbioru na przedział [0, 1]:

$$\mu_A(x) : X \to [0, 1]$$

Zerowy stopień przynależności informuje, że element nie należy do zbioru.

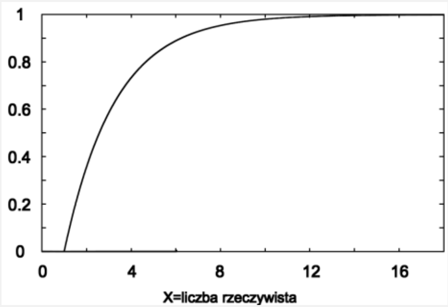
Jedynka oznacza całkowitą przynależność.

Wartości pośrednie oznaczają częściową przynależność x do A.

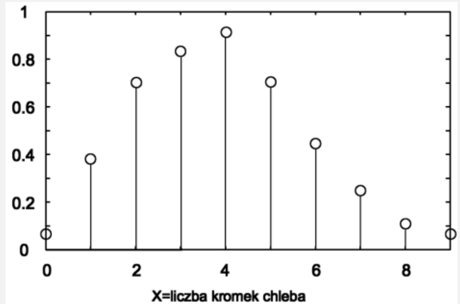


Przykłady:

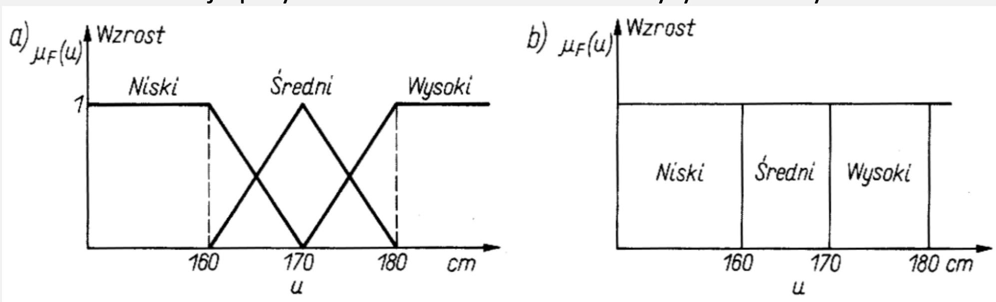
Funkcja przynależności do zbioru "liczby dużo większe od 1"



Funkcja przynależności do zbioru "liczba kromek zjadanych na śniadanie"



Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych i "ostrych"



ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Za pomocą zbiorów rozmytych możemy formalnie określić pojęcia nieprecyzyjne i wieloznaczne, takie jak "wysoka temperatura", "młody człowiek", "średni wzrost" lub "duże miasto". Są to pojęcia opisowe (wielkości lingwistyczne), nieostre, rozmyte, nie związane ściśle z wartościami numerycznymi, zrozumiałe dla człowieka, ale trudne do przedstawienia w postaci numerycznej.

Zbiór rozmyty – zbiór uporządkowanych par $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Centrum zbioru rozmytego A – zbiór takich punktów $x \in A$, w których $\mu_A(x) = 1$

Nośnik zbioru rozmytego A – zbiór takich punktów $x \in A$, w których $\mu_A(x) > 0$

Wysokość zbioru rozmytego A – supremum (kres górny) wartości funkcji przynależności zbioru A: $\sup \mu_A(x)$, dla $x \in X$

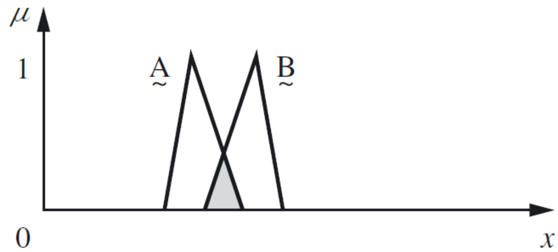
ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Przecięcie dwu zbiorów rozmytych *A* i *B* (iloczyn, część wspólna) – $A \cap B$, zbiór rozmyty o funkcji przynależności

$$\mu_{A \cap B}(x) = t(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie *t* jest tzw. *t*-normą. Najczęściej ma ona postać

$$t(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

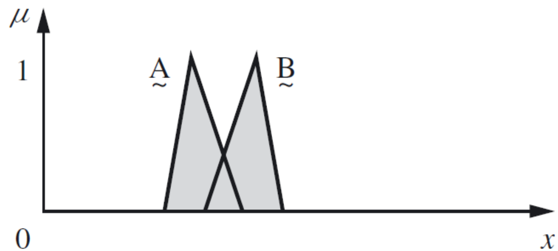


Suma dwu zbiorów rozmytych *A* i *B* – $A \cup B$, zbiór rozmyty o funkcji przynależności

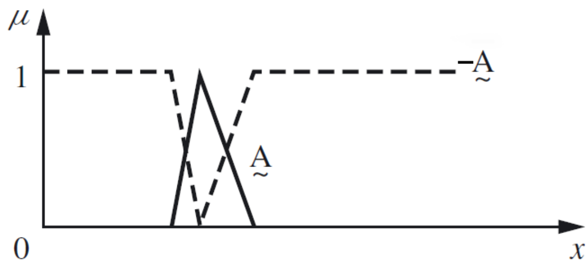
$$\mu_{A \cup B}(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie *s* jest tzw. *s*-normą. Najczęściej ma ona postać

$$s(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



Dopełnienie zbioru rozmytego *A* (–*A*) – zbiór rozmyty o funkcji przynależności $\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x)$



ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Zbiór rozmyty *A* zawiera się w zbiorze rozmytym *B*, gdy $\forall x \in X: \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

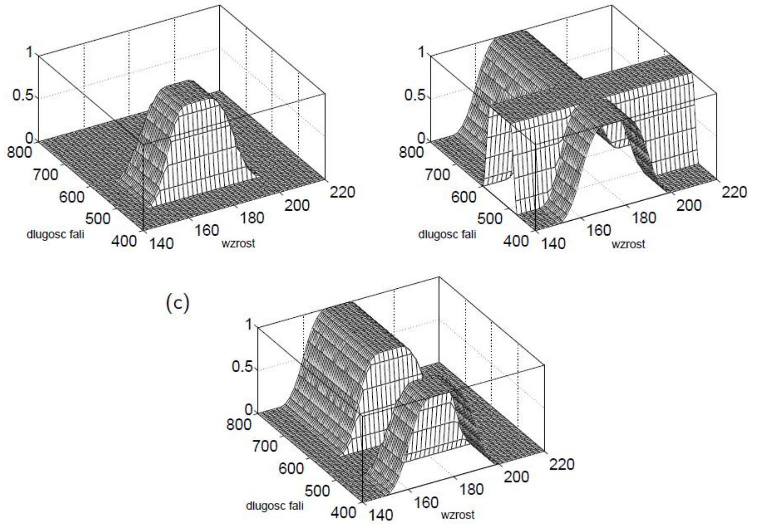
Zbiór rozmyty *A* jest równy zbiorowi rozmytemu *B*, gdy $\forall x \in X: \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$

Iloczyn (produkt) kartezjański dwu zbiorów rozmytych *A* i *B* zdefiniowanych w przestrzeniach *X* i *Y* – zbiór rozmyty w przestrzeni $X \times Y$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

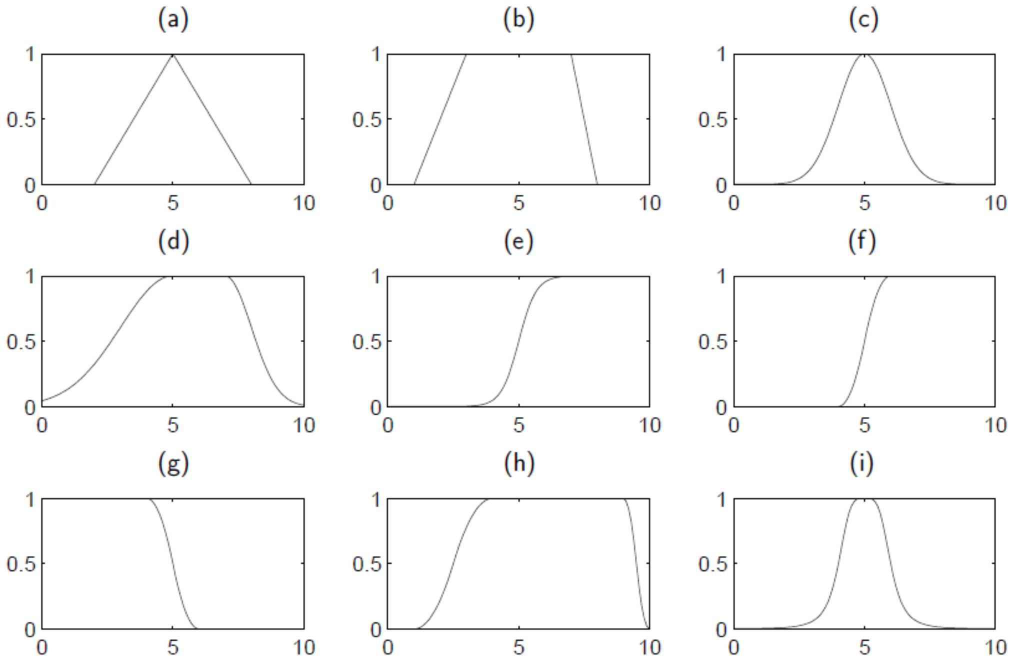
Suma (koprodukt) kartezjańska dwu zbiorów rozmytych *A* i *B* zdefiniowanych w przestrzeniach *X* i *Y* – zbiór rozmyty w przestrzeni $X \times Y$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A+B}(x, y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y))$$



Rys. 5.7: Funkcje przynależności podzbiorów: (a) *średniego wzrostu i zielonooki*, (b) *średniego wzrostu lub zielonooki* i (c) *średniego wzrostu i nie zielonooki*

FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI



Rys. 5.4: Typowe funkcje przynależności: (a) trójkąt, (b) trapez, (c) funkcja Gaussa, (d) asymetryczna funkcja Gaussa, (e) funkcja sigmoidalna, (f) funkcja typu s, (g) funkcja typu z, (h) funkcja typu π, (i) uogólniona funkcja dzwonowa

Funkcja Gaussa

$$g(x, \sigma, c) = \exp\left(\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Asymetryczna funkcja Gaussa

$$si(x, a, c) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x-c))}$$

Funkcja typu s

$$s(x, a, b) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) & , a \le x \le b \\ 1 & , x > b \end{cases}$$

Funkcja typu π

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

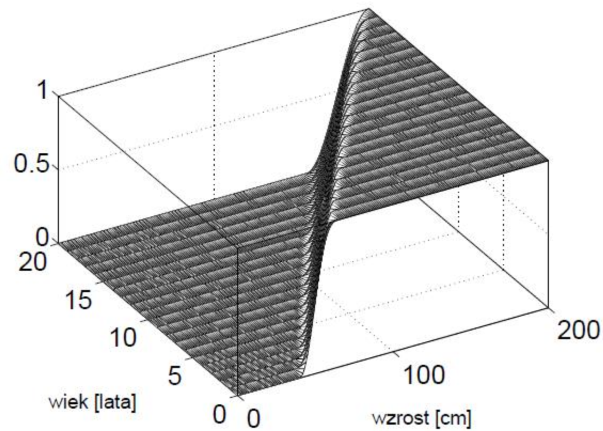
Funkcja trójkątna

$$\mu(x,a,b,c) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & dla \quad a < x \le b \\ \frac{c-x}{c-b} & dla \quad b < x < c \\ 0 & dla \quad x \ge c \end{cases}$$

Funkcja trapezowa

$$\mu(x,a,b,c,d) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & dla \quad a < x \le b \\ 1 & dla \quad b < x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & dla \quad c < x < d \\ 0 & dla \quad x > d \end{cases}$$

Funkcje przynależności mogą być wieloargumentowe. Np. przynależność do podzbioru rozmytego "wysoki na swój wiek" jest zależna od dwóch argumentów: wzrostu i wieku. Innym przykładem może być funkcja przynależności do zbioru "liczba x dużo większa od liczby y".



ZAPIS SYMBOLICZNY ZBIORÓW ROZMYTYCH

Jeżeli X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, to zbiór rozmyty $A \subseteq X$ zapisuje się jako:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

gdzie kreska ułamkowa oznacza sparowanie elementu z jego stopniem przynależności, a znak + oznacza sumę mnogościową elementów.

Przykład.

Zbiór rozmyty "liczby naturalne bliskie 7": $A = \frac{0,2}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,8}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10}$

Zbiór rozmyty "samochody luksusowe":

$$A = \frac{1}{\text{Maybach 62}} + \frac{1}{\text{Jaguar XF}} + \frac{0,98}{\text{Toyota Crown Majesta}} + \frac{0,1}{\text{Fiat Punto}} + \frac{0,4}{\text{Kia Venga}} + \frac{0,3}{\text{Citroen Xsara}}$$

LICZBY ROZMYTE

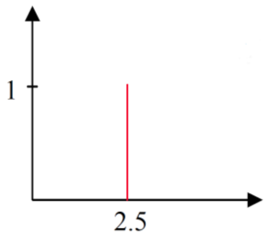
Liczba rozmyta – zbiór rozmyty A określony w zbiorze liczb rzeczywistych $A \subseteq$ R, którego funkcja przynależności $\mu_A(x): R \to [0, 1]$ spełnia warunki:

- normalności (maksymalna wartość $\mu_A(x) = 1$)
- wypukłości
- ciągłości w przedziałach

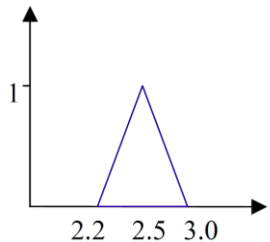
Liczbę rozmyta nazywamy dodatnią, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla $x < 0$

Liczbę rozmyta nazywamy ujemną, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla $x > 0$

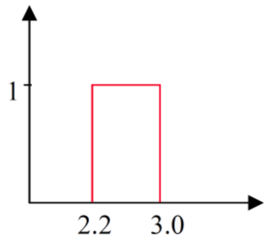
Liczba rzeczywista 2,.5



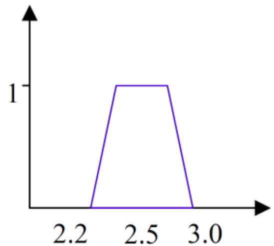
Liczba rozmyta "około 2.5"



Przedział rzeczywisty [2.2, 3.0]



Przedział rozmyty [2.2, 3.0]



Zasada rozszerzania pozwala przenieść różne operacje matematyczne na grunt zbiorów rozmytych.

Np. dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie dwóch liczb rozmytych *A* i *B* daje w wyniku liczbę rozmytą *C* o funkcji przynależności:

$$\mu_C(z) = \sup_{\substack{x,y \\ z=x\#y}} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

gdzie # oznacza jedną z operacji: +, –, *, /, sup oznacza maksymalną wartość w zbiorze

Przykład. Wyznacz sumę i iloczyn liczb rozmytych $A = \frac{0{,}7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0{,}6}{4}$, $B = \frac{0{,}8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0{,}5}{6}$.

$$A \oplus B = \frac{\min(0{,}7;0{,}8)}{5} + \frac{\max\{\min(0{,}7;1), \min(1;0{,}8)\}}{6} + \frac{\dots}{7} + \frac{\dots}{8} + \frac{\dots}{9} + \frac{\dots}{10} = \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0{,}6}{8} + \frac{0{,}5}{9} + \frac{0{,}5}{10}$$

$$A \otimes B = \frac{\min(0{,}7;0{,}8)}{6} + \frac{\min(0{,}7;1)}{8} + \frac{\dots}{9} + \frac{\dots}{12} + \frac{\dots}{16} + \frac{\dots}{18} + \frac{\dots}{24} = \frac{0{,}7}{6} + \frac{0{,}7}{8} + \frac{0{,}8}{9} + \frac{1}{12} + \frac{0{,}6}{16} + \frac{0{,}5}{18} + \frac{0{,}5}{24}$$

Relacje rozmyte pozwalają sformalizować nieprecyzyjne sformułowania typu „*x* jest prawie równe *y*” lub „*x* jest znacznie większe od *y*”.

Relacją rozmytą między zbiorami (nierozmytymi) *X* i *Y* nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$:

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y))\}, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \quad \text{gdzie } \mu_R : X \times Y \to [0,1]$$

Przykład. Zdefiniuj relację rozmytą „*y* jest mniej więcej równe *x*” dla *X* = {3,4,5} i *Y* = {4,5,6}.

$$R = \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0{,}8}{(3,4)} + \frac{0{,}8}{(4,5)} + \frac{0{,}8}{(5,4)} + \frac{0{,}8}{(5,6)} + \frac{0{,}6}{(3,5)} + \frac{0{,}6}{(4,6)} + \frac{0{,}4}{(4,6)}$$

Funkcja przynależności ma postać: $\mu_R = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x = y \\ 0{,}8, & \text{jeżeli } |x-y| = 1 \\ 0{,}6 & \text{jeżeli } |x-y| = 2 \\ 0{,}4 & \text{jeżeli } |x-y| = 3 \end{cases}$

Relacja *R* zapisana macierzowo:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Podejmowanie decyzji w otoczeniu rozmytym

Otoczenie rozmyte składa się z:

- celów rozmytych
- ograniczeń rozmytych
- decyzji rozmytej

Rozważa się pewien zbiór opcji (wyborów/wariantów decyzji) $X_{op} = \{x\}$.

Cel rozmyty to zbiór rozmyty *G* określony w zbiorze opcji i opisany funkcją przynależności $\mu_G(x): X_{op} \rightarrow [0,1]$. $\mu_G(x)$ informuje na ile opcja *x* spełnia cel *G*.

Ograniczenie rozmyte to zbiór rozmyty *C* określony w zbiorze opcji i opisany funkcją przynależności $\mu_C(x): X_{op} \rightarrow [0,1]$. $\mu_C(x)$ informuje w jakim stopniu opcja *x* spełnia ograniczenie *C*.

Podejmowanie decyzji w otoczeniu rozmytym

Decyzja rozmyta to zbiór rozmyty *D* powstały w wyniku przecięcia (iloczyn) zbiorów *G* i *C*:

$$D = G \cap C$$

przy czym $$\mu_D(x) = t(\mu_G(x), \mu_C(x))$$

gdzie *t*(.,.) to *t*-norma, która najczęściej przybiera postać min(.,.).

W przypadku wielu celów i wielu ograniczeń możemy przyjąć:

$$D = G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m$$

$$\mu_D(x) = t(\mu_{G1}(x), \ldots, \mu_{Gn}(x), \mu_{C1}(x), \ldots, \mu_{Gm}(x))$$

Szukamy takiej opcji $x^* \in X_{op}$, dla której osiągamy maksimum $\mu_D(x)$:

$$x^* = \arg\max_{x \in X_{op}} \mu_D(x)$$

PODEJMOWANIE DECYZJI W OTOCZENIU ROZMYTYM – PRZYKŁAD 1

Wybór uczelni

Rozważamy studia na jednej z czterech uczelni – X_{op} = {$U1$, $U2$, $U3$, $U4$}

Nasz cel: uczenie się w renomowanej uczelni. Miarą renomy jest miejsce w rankingu szkół wyższych. Przyjmijmy:

$$G = \frac{0,75}{U1} + \frac{1}{U2} + \frac{0,25}{U3} + \frac{0,5}{U4}$$

Jednocześnie chcemy, aby spełnione były pewne warunki:

„niezbyt duża odległość od domu”: $$C_1 = \frac{0,8}{U1} + \frac{0,9}{U2} + \frac{0,4}{U3} + \frac{0,5}{U4}$$

„bogaty program wymiany międzynarodowej”: $$C_2 = \frac{0,2}{U1} + \frac{0,2}{U2} + \frac{0,9}{U3} + \frac{0,6}{U4}$$

„dobre zaplecze techniczne uczelni”: $$C_3 = \frac{0,5}{U1} + \frac{0,3}{U2} + \frac{0,6}{U3} + \frac{0,7}{U4}$$

„duże możliwości znalezienia pracy”: $$C_4 = \frac{0,6}{U1} + \frac{0,5}{U2} + \frac{0,7}{U3} + \frac{0,7}{U4}$$

Podejmowanie decyzji w otoczeniu rozmytym – przykład 1

Wyznaczając $\mu_D(x)$ za pomocą min otrzymujemy następującą decyzję rozmytą:

$$D = G \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \frac{0{,}2}{U1} + \frac{0{,}2}{U2} + \frac{0{,}25}{U3} + \frac{0{,}5}{U4}$$

Teraz przyjmijmy, że *t*-norma ma postać iloczynową $\mu_D(x) = \mu_G(x) \cdot \mu_{C1}(x) \cdot \mu_{C2}(x) \cdot \mu_{C3}(x) \cdot \mu_{C4}(x)$:

$$D = \frac{0{,}036}{U1} + \frac{0{,}027}{U2} + \frac{0{,}0378}{U3} + \frac{0{,}0735}{U4}$$

W obu przypadkach największy stopień przynależności wskazuje uczelnię *U*4.

Ustalanie ceny nowego produktu

Zadaniem ekspertów jest ustalenie ceny nowego produktu.
Opcją jest cena produktu X_{op} = [20, 60].
Ustalono trzy cele:

- „produkt powinien mieć niską cenę” — zbiór G_1
- „produkt powinien mieć cenę bliska konkurencyjnej” — zbiór G_2
- „produkt powinien mieć cenę bliska podwójnej cenie wytworzenia” — zbiór G_3

Funkcje przynależności przedstawiono na rysunku.

Maksymalna wartość w zbiorze *D* wynosi
x^* = 37,14 zł.