

MODELOWANIE ROZMYTE

ROZMYTE SYSTEMY WNIOSKUJĄCE

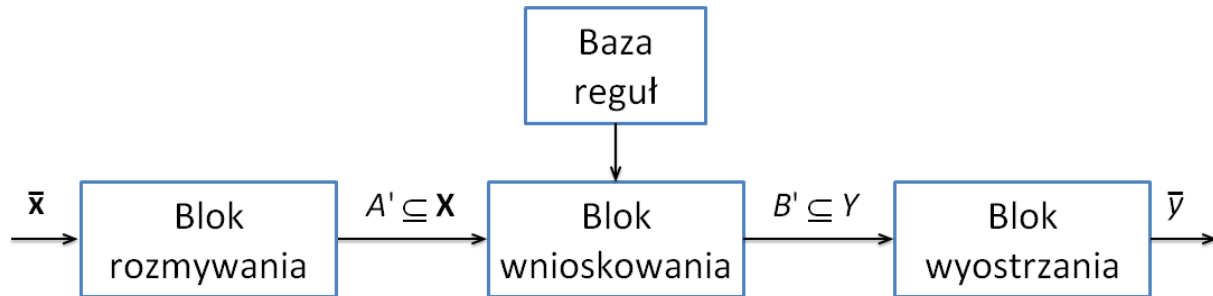
Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Rozmyte systemy wnioskujące (RSW) znajdują zastosowanie do modelowania złożonych zjawisk, których modele matematyczne są nieznane lub gdy chcemy uwzględnić informacje nieprecyzyjne lub wieloznaczne. Poniżej opisano tzw. **system Mamdaniego**.

W RSW wiedza jest reprezentowana w postaci symbolicznej – rozmytych reguł decyzyjnych.

Zastosowanie – klasyfikacja, regresja, sterowniki.



Baza reguł zwana modelem lingwistycznym, stanowi zbiór N reguł rozmytych R_k postaci:

$$R_k: \text{JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k \text{ TO } y \text{ jest } B^k$$

Reguła wyraża rozmytą implikację $(A^k = A_1^k \times A_2^k \times \dots \times A_n^k) \rightarrow B^k$.

gdzie:

$A_i^k \subseteq \mathbf{X}_i \subset R$, $k = 1, 2, \dots, N$; $i = 1, 2, \dots, n$ są zbiorami rozmytymi

$B^k \subseteq \mathbf{Y} \subset R$, $k = 1, 2, \dots, N$ są zbiorami rozmytymi

$[x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \mathbf{x} \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n$ są zmiennymi wejściowymi

$y \in \mathbf{Y}$ jest zmienną wyjściową

Część **JEŻELI** reprezentuje poprzednik, a część **TO** reprezentuje następnik.

Poszczególne reguły powiązane są za pomocą operatora logicznego **LUB**.

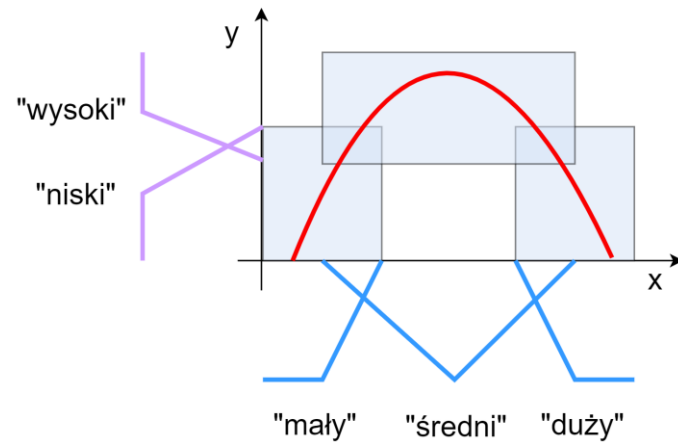
- Reguły ustalane są przez ekspertów lub tworzone są w procesie uczenia (sieci neuronowo-rozmyte)
- Każda reguła wyraża pewien związek pomiędzy x i y i ma charakter lokalny
- Baza reguł jako całość powinna modelować całe zjawisko (globalnie)
- Większa liczba reguł zapewnia dokładniejsze modelowanie

Przykład

JEŻELI x jest „mały” TO y jest „niski”

JEŻELI x jest „średni” TO y jest „wysoki”

JEŻELI x jest „duży” TO y jest „niski”



Przykład

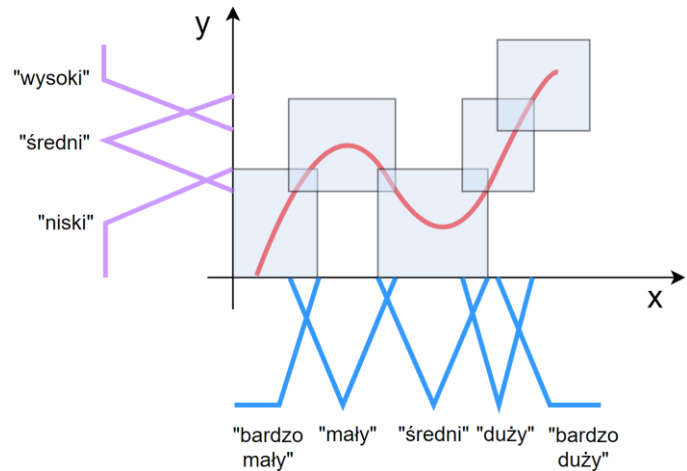
JEŻELI x jest „bardzo mały” TO y jest „niski”

JEŻELI x jest „mały” TO y jest „średni”

JEŻELI x jest „średni” TO y jest „niski”

JEŻELI x jest „duży” TO y jest „średni”

JEŻELI x jest „bardzo duży” TO y jest „wysoki”



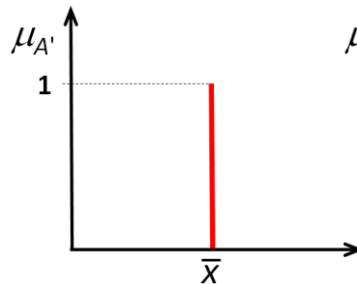
Blok rozmywania

Wartości zmiennych wejściowych $\bar{x}_i$ są rozmywane, tzn. wartości rzeczywiste przekształcane są na zbiór rozmyty A_i' . Pozwala to uwzględniać niepewność co do wartości zmiennej wejściowej.

Jeśli wartość zmiennej jest dokładna stosujemy singleton.

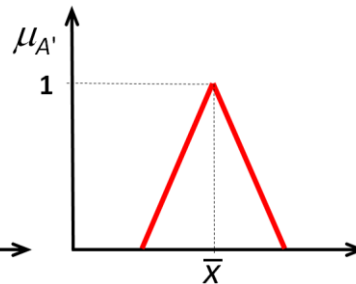
Singleton

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}, \\ 0, & \text{jeżeli } \mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}. \end{cases}$$



Rozmywanie

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}{\delta}\right],$$



- Wejściem bloku wnioskowania jest zbiór rozmyty

$$A' = A'_1 \times A'_2 \times \dots \times A'_n$$

- Na wyjściu k -tej reguły otrzymujemy zbiór rozmyty $\bar{B}^k$, który powstaje poprzez złożenie zbioru A' i implikacji rozmytej reprezentowanej przez tę regułę

$$\bar{B}^k = A' \circ (A^k \rightarrow B^k)$$

Funkcja przynależności zbioru $\bar{B}^k$

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n} \left\{ T \left(\mu_{A'}(\mathbf{x}), \mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) \right) \right\}$$

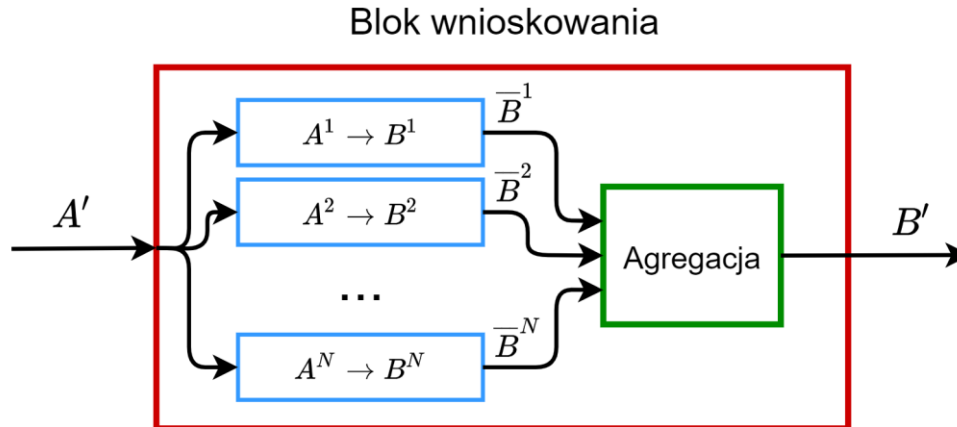
Konkretna postać tej funkcji zależy od przyjętej t -normy, reguły wnioskowania (implikacji) i sposobu zdefiniowania iloczynu kartezjańskiego.

W przypadku operacji rozmywania typu singleton otrzymujemy

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \mu_{A^k \rightarrow B^k}(\bar{\mathbf{x}}, y)$$

Blok wnioskowania

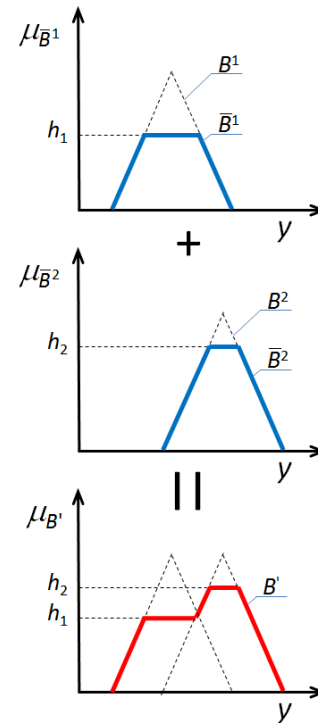
- Wynikowy zbiór rozmyty zbioru reguł B' powstaje poprzez zsumowanie (agregację) zbiorów rozmytych $\bar{B}^k$



- Funkcja przynależności do zbioru B'

$$\mu_{B'}(y) = \max[\mu_{\bar{B}^1}(y), \mu_{\bar{B}^2}(y), \dots, \mu_{\bar{B}^N}(y)]$$

Zamiast max możemy użyć innej postaci s-normy.



Jeżeli $n = 2$, t-norma jest typu min, rozmyte wnioskowanie definiuje reguła typu min oraz iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych określa wzór

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

to funkcja przynależności zbioru $\bar{B}^k$ przybiera postać

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{B}^k}(y) &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} [\min(\mu_{A'}(\mathbf{x}), \mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y))] \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{ \min[\mu_{A'}(\mathbf{x}), \min(\mu_{A'}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y))] \} \\ &= \sup_{x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2} \{ \min[\mu_{A'_1}(x_1), \mu_{A'_2}(x_2), \mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \mu_{B^k}(y)] \}. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = \mu_{A_1^k \times A_2^k}(x_1, x_2) = \min[\mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2)]$$

oraz

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \mu_{A'_1 \times A'_2}(x_1, x_2) = \min[\mu_{A'_1}(x_1), \mu_{A'_2}(x_2)].$$

Jeżeli $n = 2$, t-norma jest typu iloczyn, rozmyte wnioskowanie definiuje reguła typu iloczyn oraz iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych określa wzór

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \mu_B(y)$$

to funkcja przynależności zbioru $\bar{B}^k$ przybiera postać

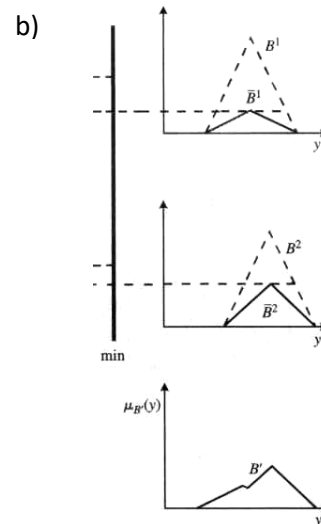
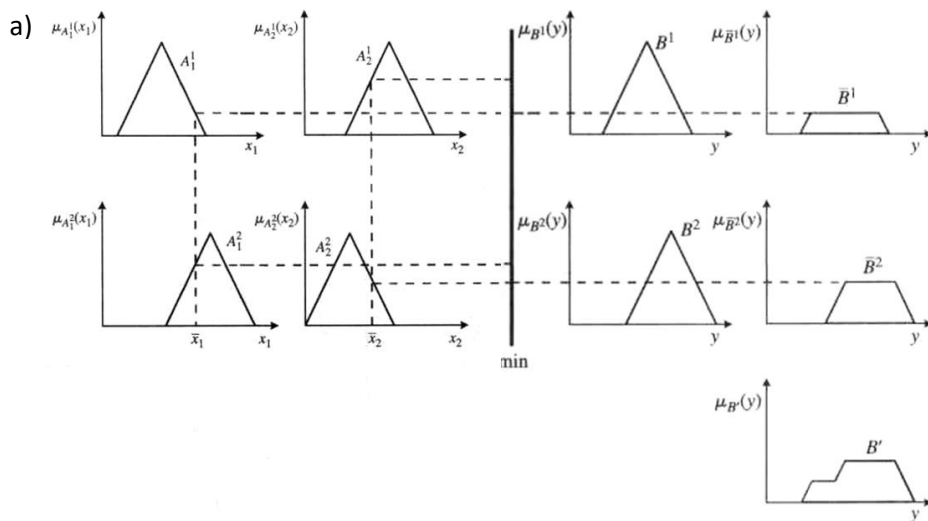
$$\begin{aligned} \mu_{\bar{B}^k}(y) &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{ \mu_{A'}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) \} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{ \mu_{A'}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{A^k}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{B^k}(y) \} \\ &= \sup_{x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2} \{ \mu_{A'_1}(x_1) \cdot \mu_{A'_2}(x_2) \cdot \mu_{A^k_1}(x_1) \cdot \mu_{A^k_2}(x_2) \cdot \mu_{B^k}(y) \}. \end{aligned}$$

Dana jest baza reguł:

R_1 : JEŻELI x_1 jest A_1^1 I x_2 jest A_2^1 TO y jest B^1

R_2 : JEŻELI x_1 jest A_1^2 I x_2 jest A_2^2 TO y jest B^2

Na wejście systemu podano przykład: $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T$. Dla przyjętych funkcji przynależności zbiorów $A_1^1, A_2^1, A_1^2, A_2^2, B^1$ i B^2 wyznacz zbiór B' . Jako operatora przecięcia $\mu_B(y)$ z h_1 i h_2 zastosuj (a) min, (b) iloczyn. Przy zastosowaniu rozmywania typu singleton otrzymamy:



W wyniku operacji rozmywania typu singleton na wejściu bloku wnioskowania otrzymujemy zbiory rozmyte A'_1 oraz A'_2 przy czym

$$\mu_{A'_1}(x_1) = \delta(x_1 - \bar{x}_1), \mu_{A'_2}(x_2) = \delta(x_2 - \bar{x}_2)$$

(a) Jako t-normę przyjmujemy operację min.

Funkcja przynależności zbioru rozmytego $\bar{B}^k$ przybiera postać (przez $R^{(k)}$ oznaczmy $A^k \rightarrow B^k$)

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \sup_{x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2} [\min(\mu_{A'_1 \times A'_2}(x_1, x_2), \mu_{R^{(k)}}(x_1, x_2, y))].$$

Ponadto założymy, że

$$\mu_{A'_1 \times A'_2}(x_1, x_2) = \min[\mu_{A'_1}(x_1), \mu_{A'_2}(x_2)] = \min[\delta(x_1 - \bar{x}_1), \delta(x_2 - \bar{x}_2)].$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{B}^k}(y) &= \sup_{x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2} [\min(\delta(x_1 - \bar{x}_1), \delta(x_2 - \bar{x}_2), \mu_{R^{(k)}}(x_1, x_2, y))] \\ &= \mu_{R^{(k)}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y) \end{aligned}$$

oraz

$$\mu_{R^{(k)}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y) = \mu_{A_1^k \times A_2^k \rightarrow B^k}(\bar{x}, \bar{x}_2, y).$$

W przypadku zastosowania reguły typu minimum (Mamdaniego) otrzymujemy

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k \rightarrow B^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y) = \min[\mu_{A_1^k \times A_2^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \mu_{B^k}(y)]. \quad (*)$$

Ponadto

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \min[\mu_{A_1^k}(\bar{x}_1), \mu_{A_2^k}(\bar{x}_2)].$$

W rezultacie

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{B}^k}(y) &= \min\{\min[\mu_{A_1^k}(\bar{x}_1), \mu_{A_2^k}(\bar{x}_2)], \mu_{B^k}(y)\} \\ &= \min[\mu_{A_1^k}(\bar{x}_1), \mu_{A_2^k}(\bar{x}_2), \mu_{B^k}(y)] \end{aligned}$$

oraz

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,2} \{\min[\mu_{A_1^k}(\bar{x}_1), \mu_{A_2^k}(\bar{x}_2), \mu_{B^k}(y)]\}.$$

(b) W tym przypadku powtarzamy rozumowanie do wzoru (*). Zamiast reguły minimum w implikacji zastosujemy iloczyn

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k \rightarrow B^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y) = \mu_{A_1^k \times A_2^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot \mu_{B^k}(y).$$

W rezultacie

$$\mu_{\bar{B}^k}(y) = \mu_{B^k}(y) \cdot \min[\mu_{A_1^k}(\bar{x}_1), \mu_{A_2^k}(\bar{x}_2)]$$

oraz

$$\mu_{B^k}(y) = \max_{k=1,2} \{ \mu_{B^k}(y) \min[\mu_{A_1^k}(\bar{x}_1), \mu_{A_2^k}(\bar{x}_2)] \}.$$