

MODELOWANIE ROZMYTE

WNISKOWANIE PRZYBLIŻONE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Logika klasyczna

W logice tradycyjnej (dwuwartościowej, boolowskiej) każdemu zdaniu przyporządkowana jest prawda lub fałsz (wartość logiczna 1, jeśli jest ono prawdziwe i 0 jeśli fałszywe).

Elementarne zdania logiczne łączą się w formy zdaniowe przy zastosowaniu spójników logicznych: koniunkcji, alternatywy, implikacji, równoważności, negacji.

a	1	1	0	0
b	1	0	1	0
koniunkcja $a \wedge b$	1	0	0	0
alternatywa $a \vee b$	1	1	1	0
implikacja $a \Rightarrow b$	1	0	1	1
równoważność $a \Leftrightarrow b$	1	0	0	1
negacja $\neg a$	0	0	1	1

Pod pojęciem implikacji rozumiemy stwierdzenie „jeśli **a** to **b**”.

a nazywane jest przesłanką lub poprzednikiem, natomiast **b** – konkluzją lub następnikiem.

Istnieje analogia pomiędzy prawami logiki a działaniami na zbiorach.

Logika	Teoria zbiorów
koniunkcja	iloczyn
alternatywa	suma
negacja	dopełnienie
implikacja	inkluzja
równoważność	równość

W logice klasycznej prawdziwość pewnych zdań jest wnioskowana na podstawie prawdziwości innych zdań.

Przez **regułę wnioskowania** rozumiemy sposób wyprowadzania ze zdań prawdziwych, zwanych **przesłankami**, zdań prawdziwych, zwanych **wnioskami**. Najczęściej stosowanymi regułami wnioskowania są: modus ponendo ponens i modus tollendo tollens.

Regułę wnioskowania **modus ponendo ponens** (wnioskowanie stwierdzające przez stwierdzenie) określa następujący schemat wnioskowania:

Przesłanka 1 (fakt)	p
Przesłanka 2 (reguła, implikacja)	$p \Rightarrow q$
Wniosek	q

p i q oznaczają zdania prawdziwe; p jest poprzednikiem, a q następnikiem implikacji.

Regułę tę odczytujemy: Jeżeli poprzednik prawdziwej implikacji jest prawdziwy, to następnik jest również prawdziwy.

Regułę modus pollendo ponens można zapisać

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

Przykłady

Jeśli prawdą jest p – "Jan jest kierowcą" i prawdą jest $p \Rightarrow q$ – "JEŻELI Z jest kierowcą, TO Z ma prawo jazdy", to prawdą jest q – "Jan ma prawo jazdy".

Przyjmujemy jako prawdziwe następujące zdanie: „Jeżeli dzisiaj jest poniedziałek, to jutro będzie wtorek”.
Przyjmując za prawdziwy fakt „Dzisiaj jest poniedziałek”, uznajemy za prawdziwe zdanie „Jutro będzie wtorek”.

Odmianami tej reguły jest modus tollendo ponens (wnioskowanie stwierdzające przez zaprzeczenie)

$$[\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

oraz modus ponendo tollens (wnioskowanie zaprzeczające przez stwierdzenie)

$$[p \wedge (p \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow \neg q$$

Inną podstawową regułą wnioskowania jest reguła **modus tollendo tolens** (wnioskowanie zaprzeczające przez zaprzeczenie)

Przesłanka 1 (fakt)	$\neg q$
Przesłanka 2 (reguła, implikacja)	$p \Rightarrow q$
Wniosek	$\neg p$

Regułę tę można podać następująco. Jeżeli następnik prawdziwej implikacji nie jest prawdziwy, to poprzednik również nie jest prawdziwy.

$$[\neg q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg p$$

Przykład

Przyjmujemy jako prawdziwe następujące zdanie: „Jeżeli dzisiaj jest poniedziałek, to jutro będzie wtorek”. Przyjmując za prawdziwy fakt „Jutro nie będzie wtorek”, uznajemy za prawdziwe zdanie „Dzisiaj nie jest poniedziałek”.

W logice klasycznej zdanie p postaci " $x \in A$ ", gdzie A jest klasycznym zbiorem, może przyjmować dwie wartości logiczne: prawdę lub fałsz. W logice rozmytej zdanie to może przyjmować różne stopnie prawdy μ (stopnie przynależności elementu x do zbioru A).

W logice rozmytej regułę modus ponens odczytujemy: Jeżeli poprzednik implikacji jest prawdziwy w stopniu μ_A i ta implikacja jest prawdziwa w stopniu $\mu_{A \rightarrow B}$, to następnik jest prawdziwy w stopniu μ_B .

Uogólniona reguła modus ponens:

Przesłanka 1 (fakt)	x jest A'
Przesłanka 2 (reguła, implikacja)	x jest $A \Rightarrow y$ jest B
Wniosek	y jest B'

gdzie: $A, A' \subseteq X$ i $B, B' \subseteq Y$ są zbiorami rozmytymi, x i y są zmiennymi lingwistycznymi.

Zbiory A i A' oraz B i B' są do siebie podobne.

Symboliczny zapis uogólnionej reguły modus ponens

$$[x \text{ jest } A' \wedge (x \text{ jest } A \Rightarrow y \text{ jest } B)] \Rightarrow y \text{ jest } B'$$

Przykład

Jeśli zdanie "Jan jest **bardzo bystry**" jest prawdą w stopniu μ_A i reguła "JEŻELI **Z** jest **bystry**, TO **oceny Z** są **dobre**" jest prawdziwa w stopniu $\mu_{A \rightarrow B}$, to zdanie "**Oceny Jana** są **bardzo dobre**" jest prawdziwe w stopniu μ_B .

x – Jan, **Z**

y – **oceny Jana, oceny Z**

A – **bystry**

A' – **bardzo bystry**

B – **dobre**

B' – **bardzo dobre**

Wynikowy zbiór rozmyty B' wynika ze złożenia zbioru A' i implikacji rozmytej $A \rightarrow B$

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B)$$

Implikacja rozmyta $A \rightarrow B$ jest równoważna pewnej relacji rozmytej $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ o funkcji przynależności $\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y)$. Zatem funkcję przynależności zbioru rozmytego B' można wyznaczyć za pomocą wzoru (patrz poprzedni wykład)

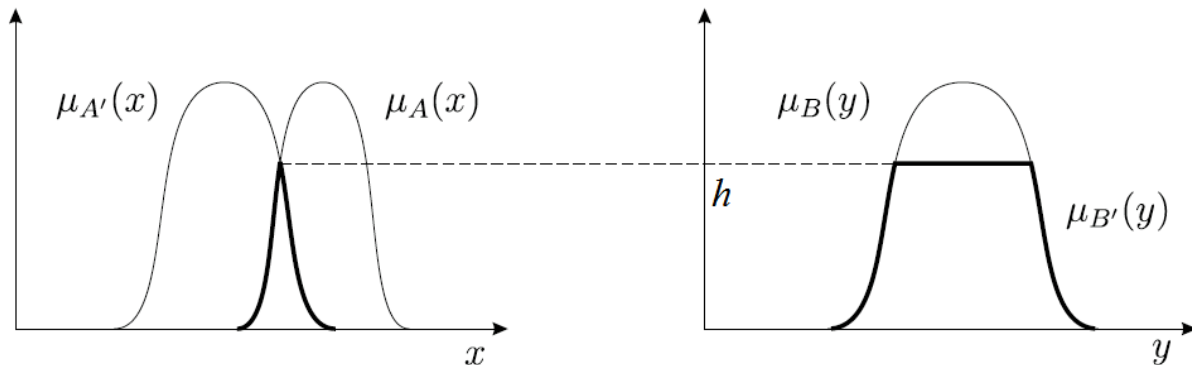
$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \{T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))\}$$

Relacja rozmyta $A \rightarrow B$ może być zdefiniowana na wiele sposobów. Przyjmijmy definicję Mamdaniego: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$. Stosując operacje min jako t -normę powyższy wzór zapiszemy:

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \sup_{x \in \mathbf{X}} \{\min[\mu_{A'}(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(y))]\} \\ &= \min \left[\sup_{x \in \mathbf{X}} \min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)), \mu_B(y) \right] \end{aligned}$$

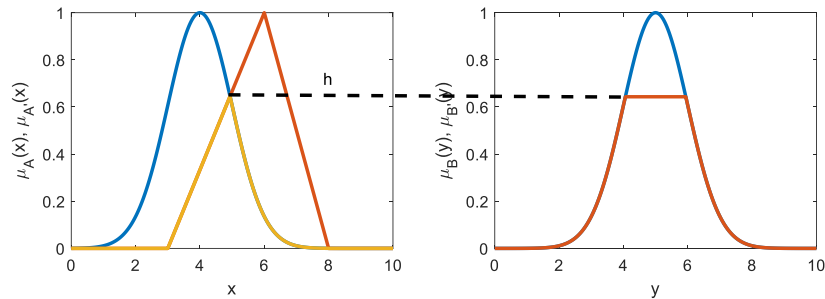
Sposób wyznaczania $\mu_{B'}(y)$ możemy zapisać w krokach:

1. Przyjmujemy pewne funkcje przynależności $\mu_{A'}(x)$, $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(y)$.
2. Znajdujemy przecięcie $\min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x))$.
3. Znajdujemy największą wartość funkcji przynależności tego przecięcia
$$h = \sup_{x \in X} \min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)).$$
4. Znajdujemy przecięcie stałej h z $\mu_B(y)$: $\min[h, \mu_B(y)]$, które przyjmujemy jako $\mu_{B'}(y)$.

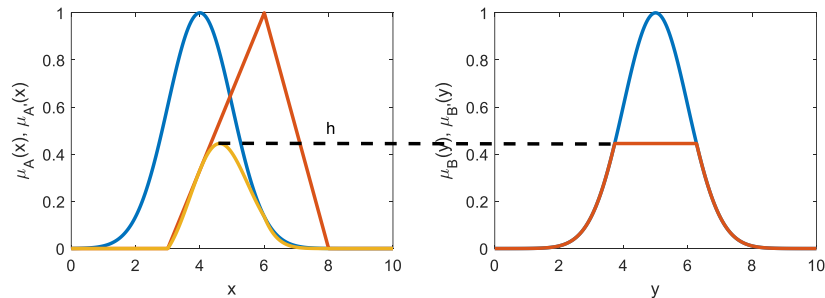


Warianty z różnymi definicjami t-normy

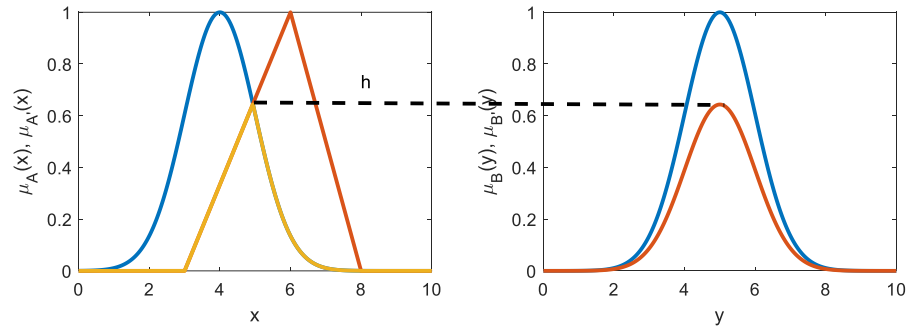
$$h = \sup_{x \in X} \min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)) \text{ i } \mu_{B'}(y) = \min[h, \mu_B(y)]$$



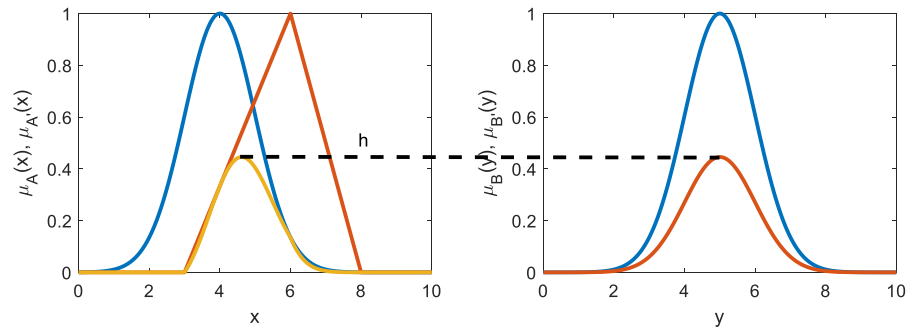
$$h = \sup_{x \in X} \mu_{A'}(x) \mu_A(x) \text{ i } \mu_{B'}(y) = \min[h, \mu_B(y)]$$



$$h = \sup_{x \in X} \min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)) \text{ i } \mu_{B'}(y) = h\mu_B(y)$$



$$h = \sup_{x \in X} \mu_{A'}(x)\mu_A(x) \text{ i } \mu_{B'}(y) = h\mu_B(y)$$



Uogólniona reguła modus tollens

Przesłanka 1 (fakt)	$y \text{ jest } B'$
Przesłanka 2 (reguła, implikacja)	$x \text{ jest } A \Rightarrow y \text{ jest } B$
Wniosek	$x \text{ jest } A'$

$$[y \text{ jest } B' \wedge (x \text{ jest } A \Rightarrow y \text{ jest } B)] \Rightarrow x \text{ jest } A'$$

Wynikowy zbiór rozmyty A' wyznacza się ze złożenia

$$A' = (A \rightarrow B) \circ B'$$

przy czym

$$\mu_{A'}(x) = \sup_{y \in Y} \{T(\mu_{A \rightarrow B}(x, y), \mu_{B'}(y))\}$$

Uogólniony sylogizm warunkowy

Przesłanka 1	$x \text{ jest } A \Rightarrow y \text{ jest } B$
Przesłanka 2	$y \text{ jest } B' \Rightarrow z \text{ jest } C$
Wniosek	$x \text{ jest } A \Rightarrow z \text{ jest } C'$

$$[(x \text{ jest } A \Rightarrow y \text{ jest } B) \wedge (y \text{ jest } B' \Rightarrow z \text{ jest } C)] \Rightarrow (x \text{ jest } A \Rightarrow z \text{ jest } C')$$

Wynikową relację rozmytą $A \rightarrow C'$ wyznacza się ze złożenia

$$A \rightarrow C' = (A \rightarrow B) \circ (B' \rightarrow C)$$

przy czym

$$\mu_{A \rightarrow C'}(x, z) = \sup_{y \in Y} \{T(\mu_{A \rightarrow B}(x, y), \mu_{B' \rightarrow C}(y, z))\}$$

Uogólniona zasada rozkładu

Przesłanka 1	$x \text{ jest } A' \vee y \text{ jest } B$
Przesłanka 2	$x \text{ jest } A \Rightarrow z \text{ jest } C$
Wniosek	$z \text{ jest } C \vee y \text{ jest } B$

$$[(x \text{ jest } A' \vee y \text{ jest } B) \wedge (x \text{ jest } A \Rightarrow z \text{ jest } C)] \Rightarrow (z \text{ jest } C \vee y \text{ jest } B)$$

Wynikową relację rozmytą $C \vee B$ wyznacza się ze złożenia

$$C \vee B = (A' \vee B) \circ (A \rightarrow C)$$

przy czym

$$\mu_{C \vee B}(z, y) = \sup_{x \in X} \{T(\mu_{A' \vee B}(x, y), \mu_{A \rightarrow C}(x, z))\}$$

Implikacja rozmyta

W implikacji występują dwa zbiory rozmyte A i B . Wartość logiczną tej formy zdaniowej charakteryzuje pewien stopień przynależności $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \in [0, 1]$.

Najczęściej stosowana jest implikacja Mamdaniego, dla której funkcję przynależności określa wzór

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Alternatywą jest implikacja Larsena

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \mu_B(y)$$

Wyrażenia Mamdaniego i Larsena nie są implikacjami w sensie logicznym, co ilustruje tabela

$\mu_A(x)$	$\mu_B(y)$	$\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$	$\mu_A(x) \mu_B(y)$	$\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Implikacje logiczne powinny spełniać następujące warunki:

1. Implikacja powinna być nierosnącą funkcją pierwszego argumentu, co oznacza, że jeśli $\mu_A(x) \leq \mu_A(z)$, to $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \geq \mu_{A \rightarrow B}(z, y)$
2. Implikacja powinna być niemalejącą funkcją drugiego argumentu, co oznacza, że jeśli $\mu_B(y) \leq \mu_B(z)$, to $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \leq \mu_{A \rightarrow B}(x, z)$
3. Jeśli stopień przynależności do zbioru A jest równy 0, to stopień prawdy implikacji $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 1$ (z fałszu może wynikać prawda lub fałsz)
4. Jeśli stopień przynależności do zbioru B jest równy 1, to stopień prawdy implikacji $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 1$ (prawda lub fałsz może prowadzić do prawdy)
5. Jeśli stopień przynależności do zbioru A jest równy 1, a stopień przynależności do zbioru B jest równy 0, to stopień prawdy implikacji $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 0$ (z prawdy nie może wynikać fałsz).

Lp.	Nazwa	Implikacja
1	Kleene–Dienes (binarna)	$\max\{1 - a, b\}$
2	Łukasiewicz	$\min\{1, 1 - a + b\}$
3	Reichenbach	$1 - a + a \cdot b$
4	Fodor	$\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a \leq b \\ \max\{1 - a, b\}, & \text{jeżeli } a > b \end{cases}$
5	Rescher	$\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a \leq b \\ 0, & \text{jeżeli } a > b \end{cases}$
6	Goguen	$\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a = 0 \\ \min\{1, \frac{b}{a}\}, & \text{jeżeli } a > 0 \end{cases}$
7	Gödel	$\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a \leq b \\ b, & \text{jeżeli } a > b \end{cases}$
8	Yager	$\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a = 0 \\ b^a, & \text{jeżeli } a > 0 \end{cases}$
9	Zadeh	$\max\{\min\{a, b\}, 1 - a\}$
10	Willmott	$\min \left\{ \begin{matrix} \max\{1 - a, b\} \\ \max\{a, 1 - b, \min\{1 - a, b\}\} \end{matrix} \right\}$
11	Dubois–Prade	$\begin{cases} 1 - a, & \text{jeżeli } b = 0 \\ b, & \text{jeżeli } a = 1 \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

Implikacja rozmyta

Przykłady implikacji rozmytych

$$a = \mu_A(x)$$

$$b = \mu_B(y)$$

Pozycje 1-4 to przykłady **S-implikacji**

$$I(a, b) = S\{1 - a, b\}$$

Pozycje 6 i 7 to przykłady

R-implikacji

$$I(a, b) = \sup_z \{z \mid T\{a, z\} \leq b\}$$

Pozycja 9 to przykład **Q-implikacji**

$$I(a, b) = S\{N(a), T\{a, b\}\}$$

gdzie $N(a)$ jest operatorem negacji