

MODELOWANIE ROZMYTE

RELACJE ROZMYTE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Relacje rozmyte pozwalają sformalizować nieprecyzyjne sformułowania typu „ x jest prawie równe y ” lub „ x jest znacznie większe od y ”.

Relacją rozmytą R między dwoma niepustymi zbiorami (nierozmytymi) $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, tzn.

$$R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{(x, y) : x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$$

Innymi słowy relacja rozmyta jest zbiorem par

$$R = \left\{ \left((x, y), \mu_R(x, y) \right) \right\}, \quad \forall_{x \in \mathbf{X}} \forall_{y \in \mathbf{Y}}$$

gdzie

$$\mu_R : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow [0, 1]$$

jest funkcja przynależności.

Funkcja przynależności μ_R przypisuje każdej parze (x, y) stopień przynależności, który interpretuje się jako siłę powiązania/związku/relacji między elementami x i y .

Relację rozmytą można zapisać w postaci

$$R = \sum_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

$$R = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

Przykład

Zdefiniuj relację rozmytą „y jest mniej więcej równe x” dla $\mathbf{X} = \{3,4,5\}$ i $\mathbf{Y} = \{4,5,6\}$.

$$R = \frac{1}{(4,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0,8}{(3,4)} + \frac{0,8}{(4,5)} + \frac{0,8}{(5,6)} + \frac{0,6}{(3,5)} + \frac{0,6}{(4,6)} + \frac{0,4}{(3,6)}$$

Funkcja przynależności ma postać: $\mu_R = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x = y \\ 0,8, & \text{jeżeli } |x - y| = 1 \\ 0,6 & \text{jeżeli } |x - y| = 2 \\ 0,4 & \text{jeżeli } |x - y| = 3 \end{cases}$

Relacja R zapisana macierzowo:

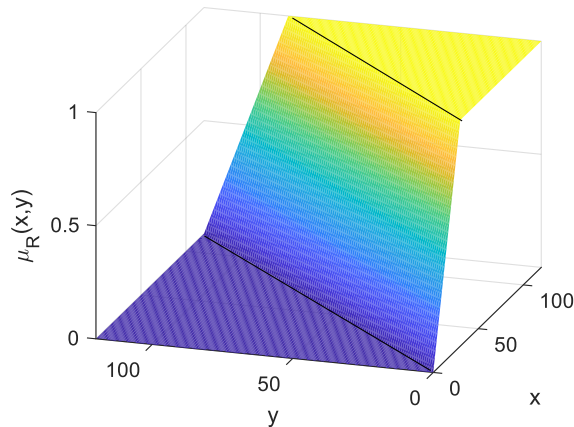
$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0,8 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Przykład

Niech $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0, 120]$ będzie długością życia człowieka. Wówczas relacja R o funkcji przynależności

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x - y \leq 0, \\ \frac{x - y}{30}, & \text{jeżeli } 0 < x - y < 30 \\ 1, & \text{jeżeli } x - y \geq 30 \end{cases}$$

reprezentuje nieprecyzyjne stwierdzenie „osoba w wieku x jest dużo starsza od osoby w wieku y ”.



Relacja rozmyta jest zbiorem rozmytym. Zatem pozostają w mocy podane wcześniej definicje przecięcia, sumy i dopełnienia, np.

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)),$$

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)),$$

$$\mu_{\widehat{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y).$$

Przykład

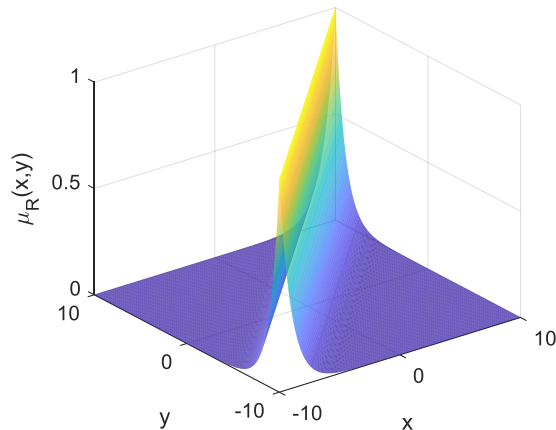
Zdefiniuj relację rozmytą „ x jest podobne do y ”.

Funkcja przynależności może mieć postać

$$\mu_R(x, y) = f(|x - y|)$$

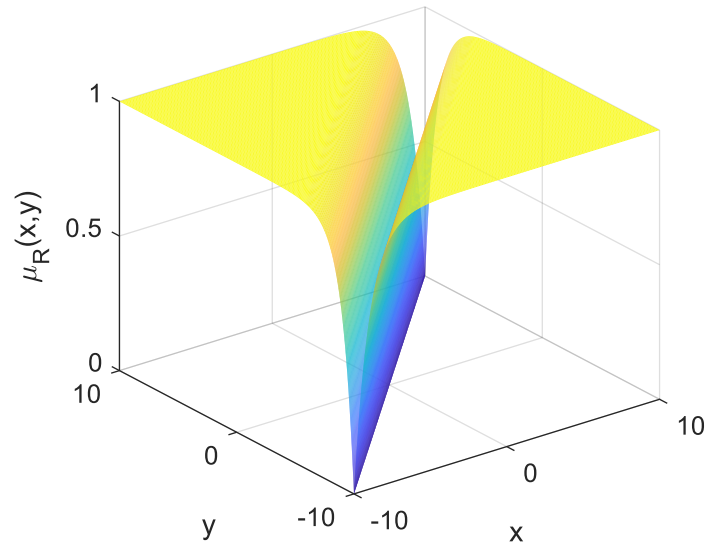
Gdzie funkcja f spełnia następującą własność: $f(0) = 1$ i jest nierosnąca na przedziale $[0, +\infty)$.

Np. $\exp(-|x - y|)$.



Relacja „ x jest niepodobne do y ” ma postać dopełnienia relacji „ x jest podobne do y ”.

$$\mu_R(x, y) = 1 - f(|x - y|)$$



Złożeniem typu sup-T relacji rozmytych $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $S \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ nazywamy relację rozmytą $R \circ S \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ o funkcji przynależności

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \{T(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}$$

Jeżeli za t-normę przyjmiemy $\min()$, a zbiór $\mathbf{Y}$ ma skończoną liczbę elementów, to otrzymujemy złożenie typu max-min

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in \mathbf{Y}} \{\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))\}$$

Założmy, że relacje R i S są reprezentowane przez macierze

$$R = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,7 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix},$$

przy czym $\mathbf{X} = \{x_1, x_2\}$, $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2\}$, $\mathbf{Z} = \{z_1, z_2, z_3\}$. Złożenie typu max-min relacji R i S ma postać

$$Q = R \circ S = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,7 & 0,9 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$q_{11} = \max[\min(0,2; 0,3), \min(0,5; 0,7)] = 0,5,$$

$$q_{12} = \max[\min(0,2; 0,6), \min(0,5; 0,9)] = 0,5,$$

$$q_{13} = \max[\min(0,2; 0,8), \min(0,5; 0,4)] = 0,4,$$

$$q_{21} = \max[\min(0,6; 0,3), \min(1; 0,7)] = 0,7,$$

$$q_{22} = \max[\min(0,6; 0,6), \min(1; 0,9)] = 0,9,$$

$$q_{23} = \max[\min(0,6; 0,8), \min(1; 0,4)] = 0,6.$$

Zatem

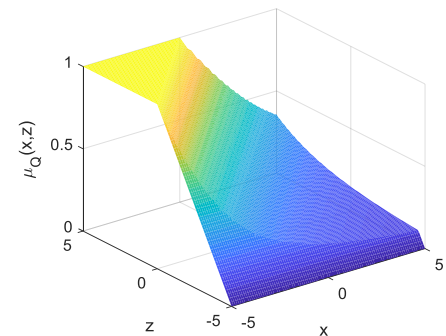
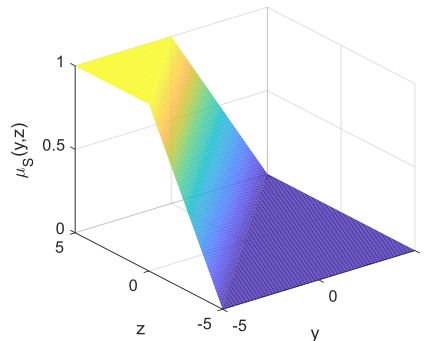
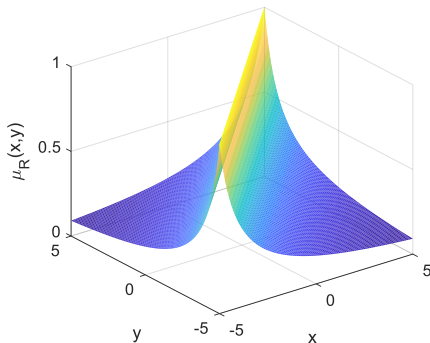
$$Q = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,4 \\ 0,7 & 0,9 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Utwórz złożenie max-min relacji „ x jest podobne do y ” opisanej funkcją przynależności

$\mu_R(x, y) = \frac{1}{1+|x-y|}$ oraz relacji „ z jest dużo większe od y ” opisanej funkcją przynależności

$$\mu_S(y, z) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } z - y \leq 0 \\ \frac{z - y}{5}, & \text{jeżeli } 0 < z - y < 5 \\ 1, & \text{jeżeli } z - y \geq 5 \end{cases}$$

Przyjmij $x, y, z \in [-5, 5]$.



PODSTAWOWE WŁASNOŚCI RELACJI ROZMYTYCH

1	$R \circ I = I \circ R = R$
2	$R \circ O = O \circ R = O$
3	$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
4	$R^m \circ R^n = R^{m+n}$
5	$(R^m)^n = R^{mn}$
6	$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
7	$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$
8	$S \subset T \rightarrow R \circ S \subset R \circ T$

gdzie I oznacza macierz jednostkowa, a O macierz zerową.

ZŁOŻENIE ZBIORU ROZMYTEGO Z RELACJĄ ROZMYTĄ

Złożenie zbioru rozmytego z relacją rozmytą jest szczególnie ważne w różnych zastosowaniach. Rozważmy zbiór rozmyty $A \subseteq \mathbf{X}$ oraz relację rozmytą $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ o funkcjach przynależności $\mu_A(x)$ i $\mu_R(x, y)$.

Złożenie zbioru rozmytego $A \subseteq \mathbf{X}$ i relacji rozmytej $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ oznaczamy $A \circ R$ i definiujemy jako zbiór rozmyty $B \subseteq \mathbf{Y}$

$$B = A \circ R$$

o funkcji przynależności

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \{T(\mu_A(x), \mu_R(x, y))\}$$

Jeśli $\mathbf{X}$ jest zbiorem przeliczalnym sub zmieniamy na max.

Założmy, że $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ oraz $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2\}$. Zbiór rozmyty A jest postaci

$$A = \frac{0,4}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0,6}{x_3},$$

natomiast relację R reprezentuje macierz

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,2 & 1 \\ 0,9 & 0,3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Rezultatem złożenia $A \circ R$ jest

$$B = \frac{\mu_B(y_1)}{y_1} + \frac{\mu_B(y_2)}{y_2}$$

przy czym

$$\mu_B(y_1) = \max\{\min(0,4; 0,5), \min(1; 0,2), \min(0,6; 0,9)\} = 0,6,$$

$$\mu_B(y_2) = \max\{\min(0,4; 0,7), \min(1; 1), \min(0,6; 0,3)\} = 1.$$

Zatem

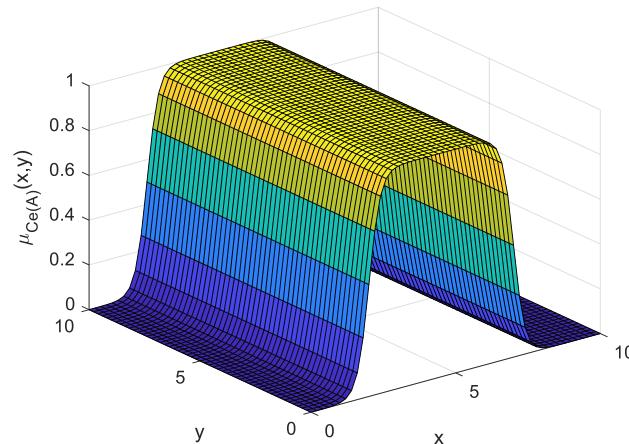
$$B = \frac{0,6}{y_1} + \frac{1}{y_2}.$$

ROZSZERZENIE CYLINDRYCZNE

Rozszerzenie cylindryczne zbioru lub relacji rozmytej umożliwia uzyskanie zbioru lub relacji rozmytej o większej wymiarowości.

Jeżeli przez A oznaczymy zbiór rozmyty zdefiniowanych w przestrzeni $\mathbf{X}$, to jego cylindryczne rozszerzenie na przestrzeń $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ jest relacją rozmytą (lub dwuwymiarowym zbiorem rozmytym) oznaczanym $Ce(A)$ i zdefiniowanym jako

$$\bigvee_{x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}} \mu_{Ce(A)}(x, y) = \mu_A(x)$$



Dany jest zbiór rozmyty w przestrzeni dyskretnej

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{0,4}{x_2} + \frac{0,6}{x_3}$$

Utwórz rozszerzenie cylindryczne tego zbioru gdy przestrzeń $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2\}$.

Rozwiązanie:

$$\text{Ce}(A) = \frac{1}{(x_1, y_1)} + \frac{0,4}{(x_2, y_1)} + \frac{0,6}{(x_3, y_1)} + \frac{1}{(x_1, y_2)} + \frac{0,4}{(x_2, y_2)} + \frac{0,6}{(x_3, y_2)}$$

PROJEKCJA RELACJI ROZMYTEJ

Projekcja relacji rozmytej jest metodą uzyskania m wymiarowej relacji rozmytej na podstawie relacji n wymiarowej, gdzie $m < n$.

W przypadku relacji dwuwymiarowej R zdefiniowanej na przestrzeni $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, możemy utworzyć jej projekcję na przestrzeń $\mathbf{X}$ lub $\mathbf{Y}$.

Projekcja na przestrzeń $\mathbf{X}$ wyraża się wzorem:

$$\bigvee_{x \in \mathbf{X}} \mu_{\text{Proj}_{\mathbf{X}}(R)}(x) = \sup_{y \in \mathbf{Y}} \mu_R(x, y)$$

Projekcja na przestrzeń $\mathbf{Y}$ wyraża się wzorem:

$$\bigvee_{y \in \mathbf{Y}} \mu_{\text{Proj}_{\mathbf{Y}}(R)}(y) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \mu_R(x, y)$$

