

MODELOWANIE ROZMYTE

LICZBY ROZMYTE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Zbiór rozmyty A określony w zbiorze liczb rzeczywistych, $A \subseteq \mathbb{R}$, którego funkcja przynależności

$$\mu_A(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

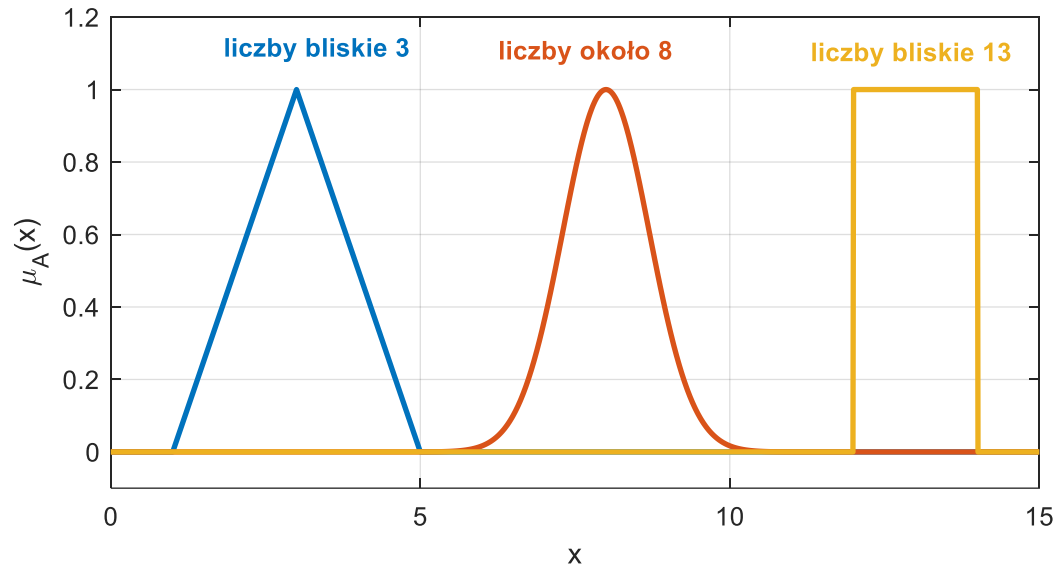
spełnia warunki:

- 1) $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_A(x) = 1$, tzn. zbiór rozmyty A jest normalny,
- 2) $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$, tzn. zbiór A jest wypukły,
- 3) $\mu_A(x)$ jest funkcją przedziałami ciągłą,

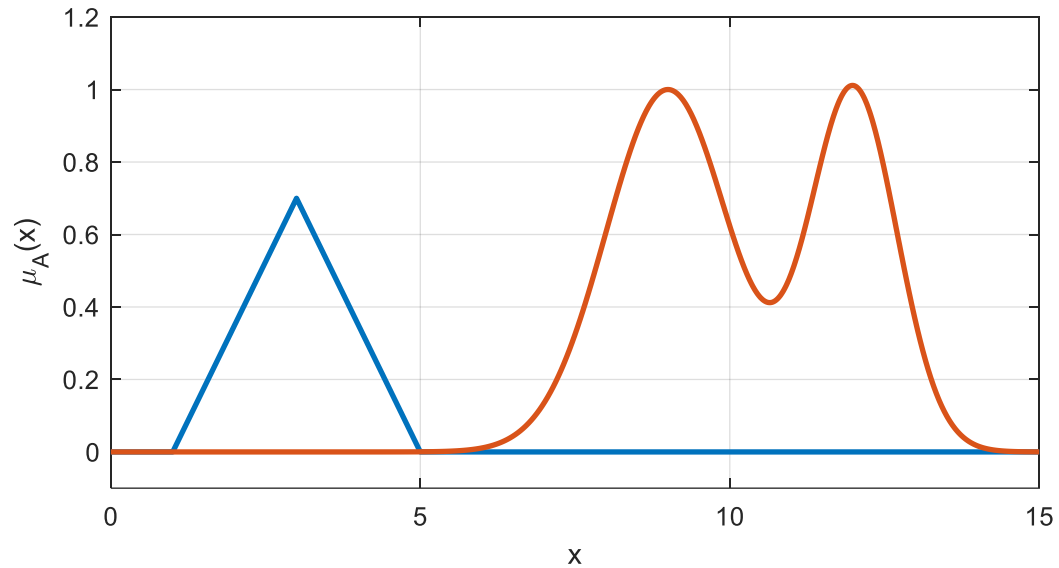
nazywamy **liczbą rozmytą**.

Liczby rozmyte wykorzystuje się do modelowania niepewności zawartej w stwierdzeniach języka naturalnego dotyczących liczb, np. „prędkość wynosi mniej więcej 50 km na godzinę”, „temperatura wynosi około 25 stopni Celsjusza”

Przykłady liczb rozmytych

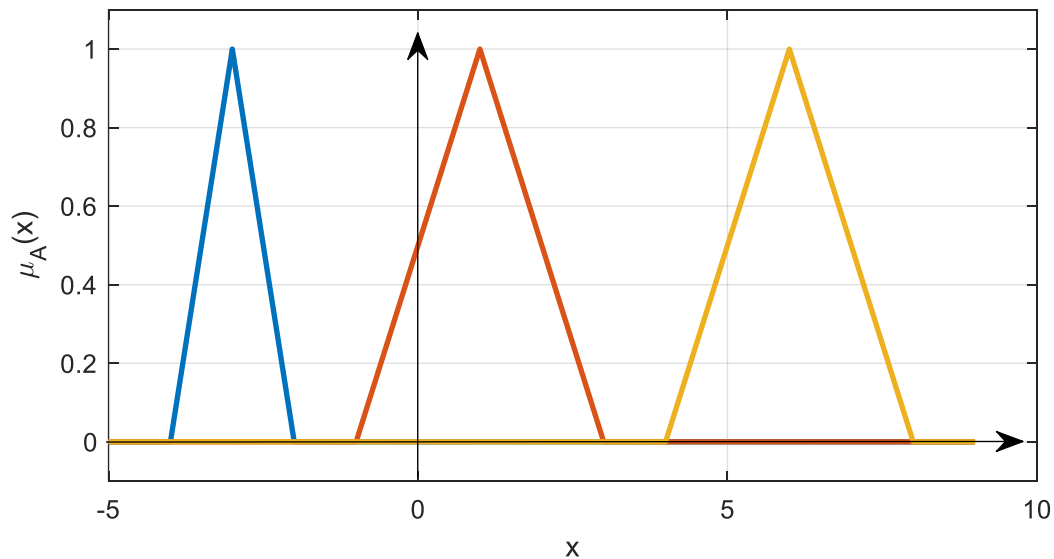


To nie są liczby rozmyte



Liczba rozmyta $A \subseteq \mathbb{R}$ jest **dodatnia**, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich $x < 0$.

Liczba rozmyta $A \subseteq \mathbb{R}$ jest **ujemna**, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich $x > 0$.



OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych definiuje się korzystając z zasady rozszerzania.

Dodawanie:
$$\mu_{A \oplus B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 + x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$

Odejmowanie:
$$\mu_{A \ominus B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 - x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$

Mnożenie:
$$\mu_{A \otimes B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 \cdot x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$

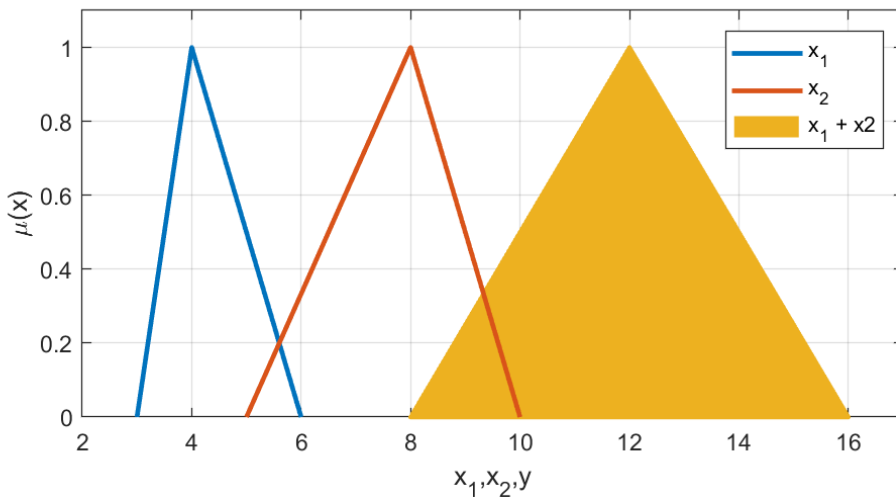
Dzielenie:
$$\mu_{A \oslash B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 / x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$

Standardowo $T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)) = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$

OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Dodawanie:

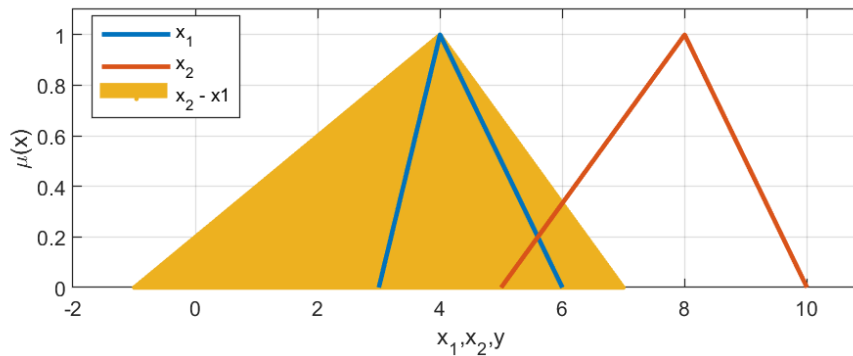
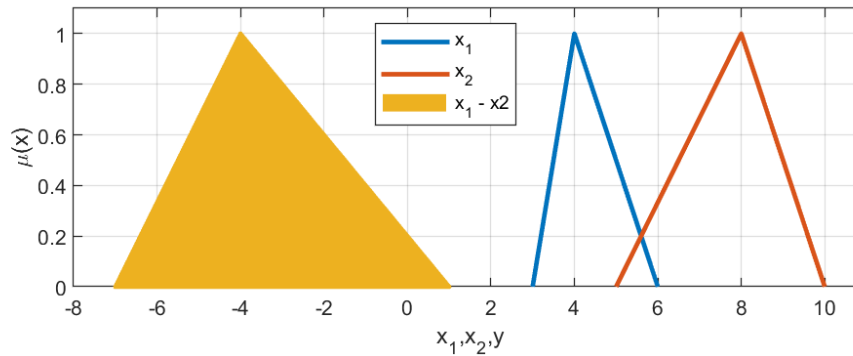
$$\mu_{A \oplus B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 + x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$



OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Odejmowanie:

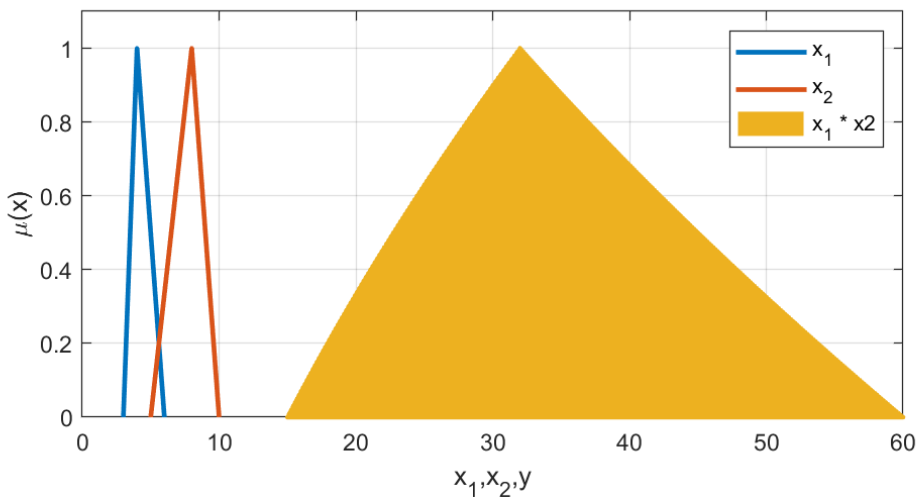
$$\mu_{A \ominus B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 - x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$



OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Mnożenie:

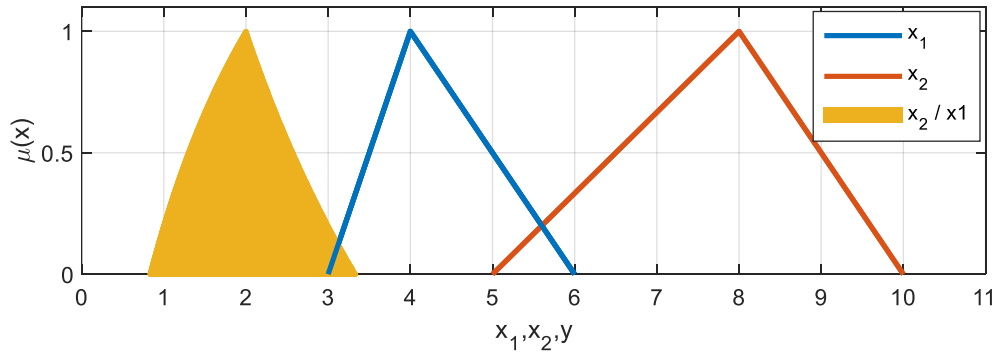
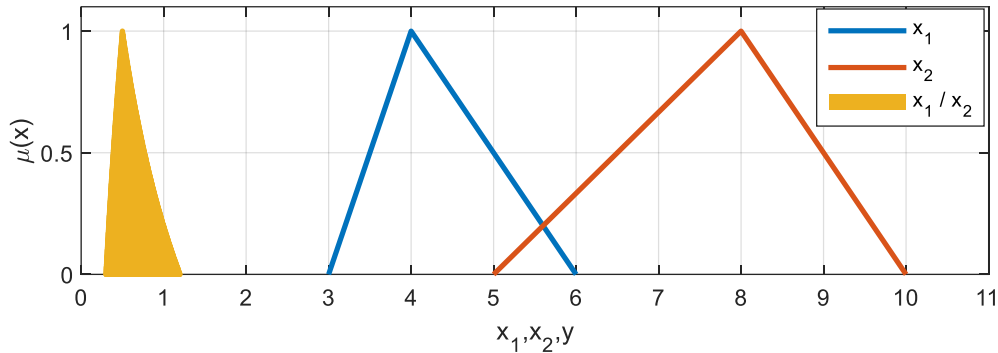
$$\mu_{A \otimes B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 \cdot x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$



OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Dzielenie:

$$\mu_{A \oslash B}(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1/x_2}} T(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$$



OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Przykład

Dodajmy oraz pomnóż my dwie liczby rozmyte postaci

$$A_1 = \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,6}{4}$$
$$A_2 = \frac{0,8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{6}$$

$$\begin{aligned} A_1 \oplus A_2 &= \frac{\min(0,7; 0,8)}{5} + \frac{\max\{\min(0,7; 1), \min(1; 0,8)\}}{6} \\ &\quad + \frac{\max\{\min(1; 1), \min(0,6; 0,8)\}}{7} + \frac{\max\{\min(0,7; 0,5), \min(0,6; 1)\}}{8} \\ &\quad + \frac{\min(1; 0,5)}{9} + \frac{\min(0,6; 0,5)}{10} \\ &= \frac{0,7}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,6}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,5}{10}. \end{aligned}$$

OPERACJE ARYTMETYCZNE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Przykład

Dodajmy oraz pomnóż my dwie liczby rozmyte postaci

$$A_1 = \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,6}{4}$$
$$A_2 = \frac{0,8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{6}$$

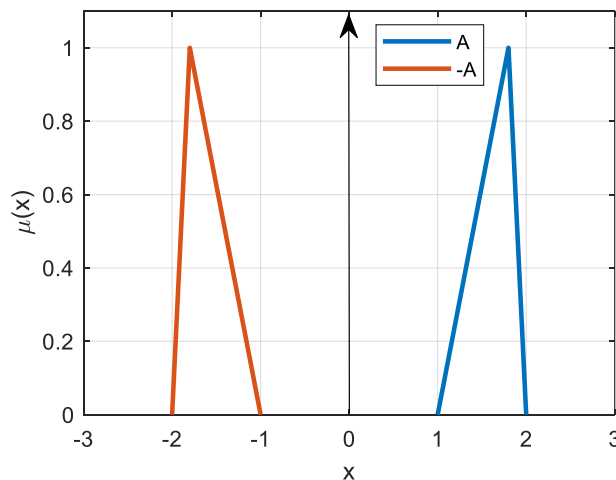
$$\begin{aligned} A_1 \odot A_2 &= \frac{\min(0,7; 0,8)}{6} + \frac{\min(0,7; 1)}{8} + \frac{\min(1; 0,8)}{9} \\ &\quad + \frac{\max\{\min(0,7; 0,5), \min(1; 1), \min(0,6; 0,8)\}}{12} \\ &\quad + \frac{\min(0,6; 1)}{16} + \frac{\min(1; 0,5)}{18} + \frac{\min(0,6; 0,5)}{24} \\ &= \frac{0,7}{6} + \frac{0,7}{8} + \frac{0,8}{9} + \frac{1}{12} + \frac{0,6}{16} + \frac{0,5}{18} + \frac{0,5}{24}. \end{aligned}$$

OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

1) *Operacja zmiany znaku.* W wyniku operacji $f(x) = -x$ otrzymujemy liczbę rozmytą przeciwną do liczby rozmytej $A \subseteq \mathbf{R}$. Liczbę tę oznaczamy $-A \subseteq \mathbf{R}$, a jej funkcja przynależności jest równa

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x).$$

Liczby rozmyte A i $-A$ są symetryczne względem osi x .

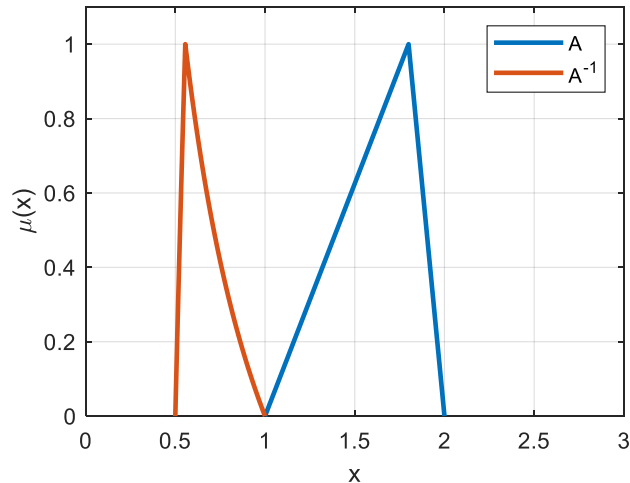


OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

2) *Operacja odwrotności.* W wyniku operacji $f(x) = x^{-1}$, $x \neq 0$, otrzymujemy liczbę rozmytą odwrotną do liczby rozmytej $A \subseteq \mathbf{R}$. Liczbę tę oznaczamy $A^{-1} \subseteq \mathbf{R}$, a jej funkcja przynależności jest równa

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(x^{-1}).$$

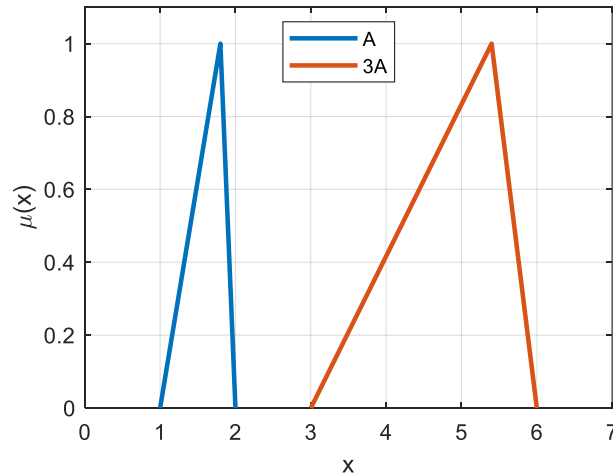
Zakładamy, że A jest liczbą rozmytą dodatnią lub ujemną. Jeżeli liczba rozmyta A nie jest ani dodatnia, ani ujemna, to zbiór rozmyty $B = f(A) = A^{-1}$ nie jest wypukły, a więc B nie jest liczbą rozmytą.



OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

3) *Operacja skalowania.* W wyniku operacji $f(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, otrzymujemy liczbę rozmytą przeskalowaną w stosunku do liczby rozmytej $A \subseteq \mathbf{R}$. Liczbę tę oznaczamy $\lambda A \subseteq \mathbf{R}$, a jej funkcja przynależności jest równa

$$\mu_{\lambda A}(x) = \mu_A(x\lambda^{-1}).$$

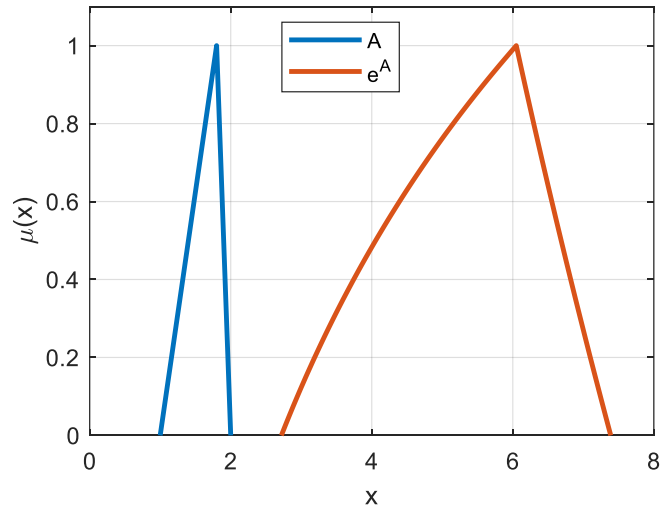


OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

4) *Operacja eksponent.* W wyniku operacji $f(x) = e^x$, $x > 0$, otrzymujemy potęgę liczby rozmytej $A \subseteq \mathbf{R}$. Liczbę tę oznaczamy $e^A \subseteq \mathbf{R}$, a jej funkcja przynależności jest równa

$$\mu_{e^A}(x) = \begin{cases} \mu_A(\log x) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

a zatem e^A jest liczbą rozmytą dodatnią.

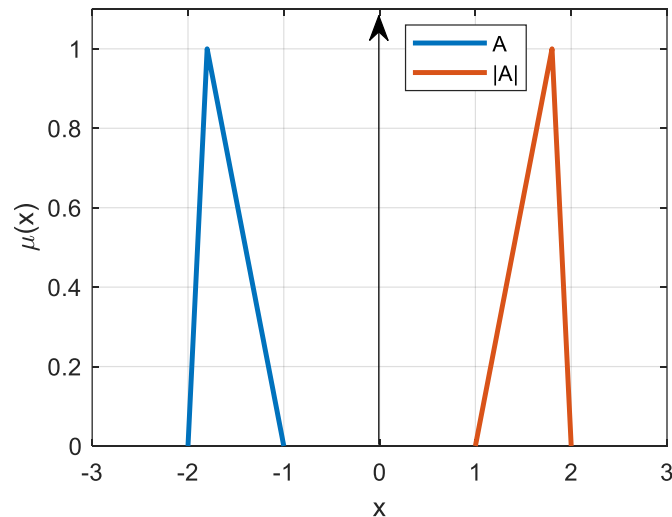


OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

5) *Operacja wartości bezwzględnej.* Wartość bezwzględną liczby rozmytej $A \subseteq \mathbf{R}$ oznaczamy $|A| \subseteq \mathbf{R}$ i określamy jako

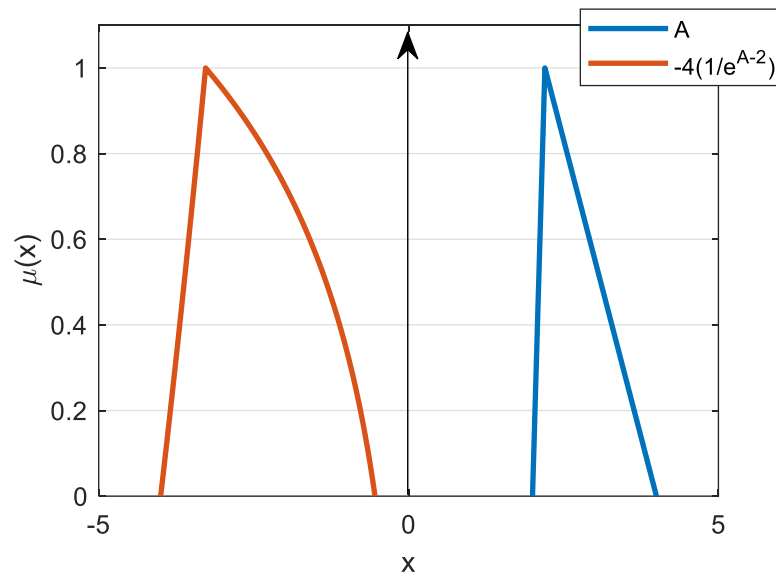
$$\mu_{|A|}(x) = \begin{cases} \max(\mu_A(x), \mu_A(-x)) & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Oczywiście $|A|$ jest liczbą rozmytą dodatnią.



OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Przykład



OPERACJE JEDNOARGUMENTOWE NA LICZBACH ROZMYTYCH

Przykład

Jeżeli

$$A = \frac{0,7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0,6}{5}$$

To liczba rozmyta $-A$ ma postać

$$-A = \frac{0,6}{-5} + \frac{1}{-2} + \frac{0,7}{-1}$$

Natomiast liczba A^{-1} ma postać

$$A^{-1} = \frac{0,6}{0,2} + \frac{1}{0,5} + \frac{0,7}{1}$$

Łatwo sprawdzić, że w powyższym przykładzie

$$A + (-A) \neq \frac{1}{0} \quad \text{oraz} \quad A \cdot A^{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych wymagają dość skomplikowanych obliczeń. Aby je ułatwić stosuje się alternatywną **notację typu L-P**. W notacji tej liczby rozmyte przedstawia się za pomocą trzech parametrów.

Niech L oraz P będą funkcjami odwzorowujący $(-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$

oraz spełniającymi warunki

- 1) $L(-x) = L(x)$ oraz $P(-x) = P(x)$,
- 2) $L(0) = 1$ oraz $P(0) = 1$,
- 3) L i P są funkcjami nierosnącymi w przedziale $[0, +\infty)$.

Jako przykłady funkcji L oraz P można podać

$$L(x) = P(x) = e^{-|x|^p} \quad p > 0,$$

$$L(x) = P(x) = \frac{1}{1 + |x|^p} \quad p > 0,$$

$$L(x) = P(x) = \max(0, 1 - |x|^p) \quad p > 0,$$

$$L(x) = P(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Liczba rozmyta $A \subseteq \mathbf{R}$ jest *liczbą rozmytą typu L-P* wtedy i tylko wtedy, gdy jej funkcja przynależności ma postać

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & \text{jeżeli } x \leq m, \\ P\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & \text{jeżeli } x \geq m, \end{cases}$$

gdzie m to liczba rzeczywista, zwana wartością średnią liczby rozmytej ($\mu_A(m) = 1$), α — liczba rzeczywista dodatnia, zwana rozrzutem lewostronnym, β — liczba rzeczywista dodatnia, zwana rozrzutem prawostronnym. Zauważmy, że jeżeli rozrzuty α i β zwiększają się, to liczba A staje się „bardziej” rozmyta. Liczbę rozmytą typu L-P można krótko zapisać jako

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}.$$

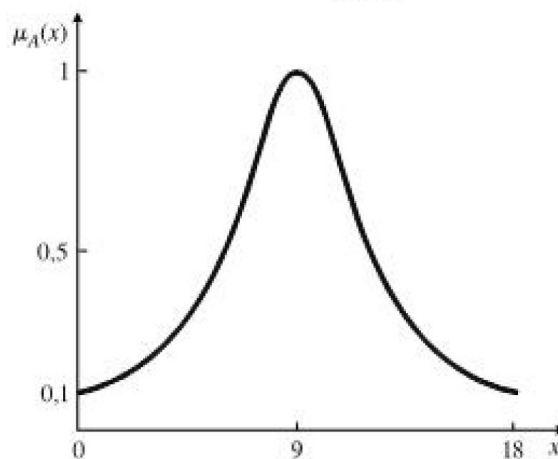
Przykład

Liczbę rozmytą „mniej więcej 9” można zapisać w postaci

$$A = (9, 3, 3)_{LP}.$$

Funkcję przynależności tej liczby przedstawia rysunek, przy czym

$$L(x) = P(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$



Operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych typu L-P sprowadzają się do operacji na trzech parametrach.

Liczba rozmyta przeciwna do liczby rozmytej A jest równa

$$-A = (-m_A, \alpha, \beta)_{LP}$$

Suma liczb rozmytych $A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}$ i $B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LP}$ ma postać

$$A \oplus B = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LP}$$

Inne operacje arytmetyczne, na przykład mnożenie i dzielenie, na liczbach rozmytych typu L-P są bardziej skomplikowane a ich wynik ma charakter przybliżony.

Funkcja przynależności liczby rozmytej typu L-P przyjmuje wartość 1 tylko w jednym punkcie $x = m$.

Zmodyfikujemy teraz definicję liczby rozmytej typu L-P tak, aby jej centrum było nie tylko w jednym punkcie, ale we wszystkich punktach przedziału $[m_1, m_2]$.

Otrzymamy wówczas definicję tzw. **płaskiej liczby rozmytej**:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{\alpha}\right), & \text{jeżeli } x \leq m_1, \\ 1, & \text{jeżeli } m_1 \leq x \leq m_2, \\ P\left(\frac{x - m_2}{\beta}\right), & \text{jeżeli } x \geq m_2. \end{cases}$$

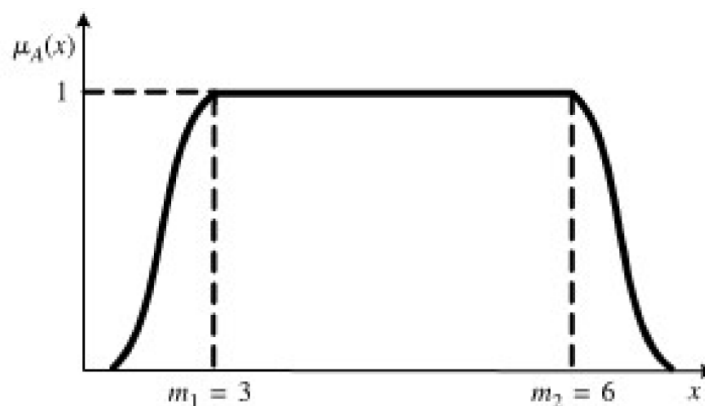
Płaską liczbę rozmytą A możemy utożsamiać **przedziałem rozmytym** postaci:

$$A = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LP}$$

Przykład

Rozważmy nieprecyzyjne stwierdzenie „cena roweru w tym sklepie waha się od ok. 3 do ok. 6 tys. zł”. Adekwatną formalizacją tego stwierdzenia może być przedział rozmyty A postaci

$$A = (3, 6, \alpha, \beta)_{LP}.$$



TRÓJKĄTNE LICZBY ROZMYTE

W teorii liczb rozmytych na szczególną uwagę zasługują **trójkątne liczby rozmyte**.

Trójkątna liczba rozmyta A jest zdefiniowana w przedziale $[a_1, a_2]$, a jej funkcja przynależności przyjmuje wartość równą 1 w punkcie a_M .

Trójkątną liczbę rozmyta możemy zapisać w symbolicznej postaci

$$A = (a_1, a_M, a_2)$$

Suma dwóch trójkątnych liczb rozmytych $A_1 = (a_1^{(1)}, a_M^{(1)}, a_2^{(1)})$ i $A_2 = (a_1^{(2)}, a_M^{(2)}, a_2^{(2)})$ jest również liczbą trójkątną:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= (a_1^{(1)}, a_M^{(1)}, a_2^{(1)}) + (a_1^{(2)}, a_M^{(2)}, a_2^{(2)}) \\ &= (a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, a_M^{(1)} + a_M^{(2)}, a_2^{(1)} + a_2^{(2)}) \end{aligned}$$