

# MODELOWANIE ROZMYTE

## ZBIORY ROZMYTE 3

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek  
Wydział Elektryczny  
Politechnika Częstochowska

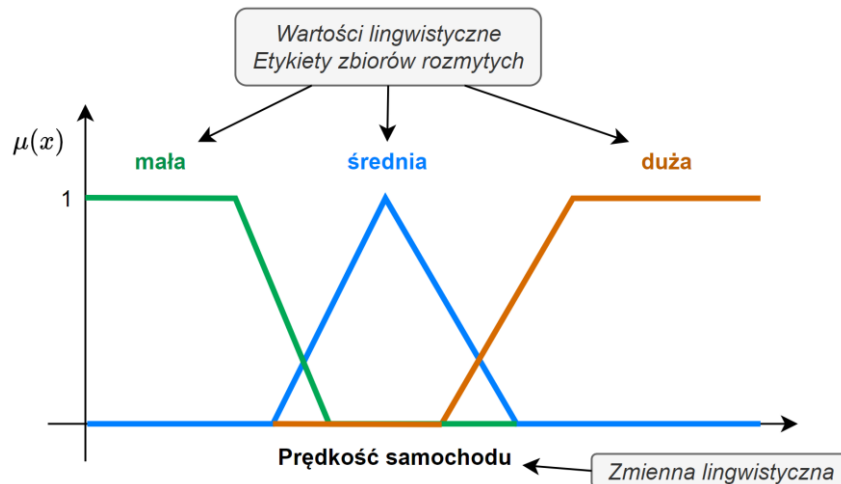
*Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN*

## ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

**Zmienna lingwistyczna** – zmienna  $x$  reprezentowana przez słowa lub stwierdzenia języka naturalnego, np. „prędkość samochodu”, „wielkość miasta”, „wiek człowieka”.

**Wartość lingwistyczna** – słowna ocena zmiennej lingwistycznej, np. „duża”, „wysoka”, „cienka”.  
Wartość lingwistyczna jest etykietą zbioru rozmytego.

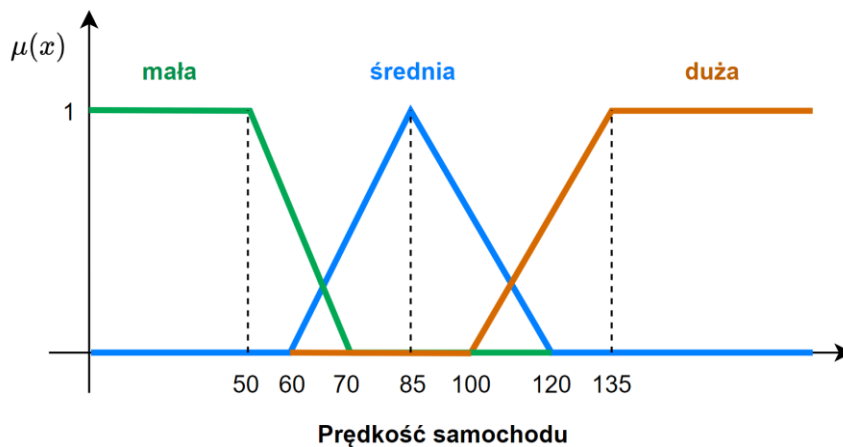
Zmienna lingwistyczna „prędkość samochodu” może przyjąć wartości lingwistyczne: „mała”, „średnia”, „duża”, gdzie „mała”, „średnia” i „duża” są jednocześnie etykietami trzech zbiorów rozmytych.



## ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

Zbiory rozmyte definiowane są w przestrzeni  $X$ . W przypadku zmiennej „prędkość samochodu”, przestrzeń ta jest przedziałem  $[0, 450]$  km/h.

Zbiór „mała” może odpowiadać przedziałowi prędkości  $[0, 70]$ , „średnia”  $[60, 120]$ , a „duża”  $[100, 450]$ .



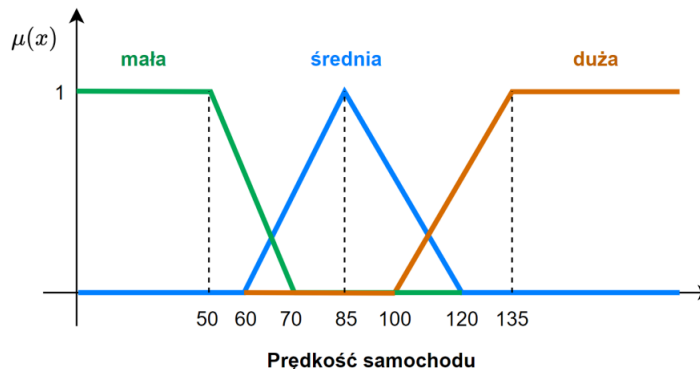
## ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

Zmiennej lingwistycznej odpowiada **zmienna numeryczna**. Ta pierwsza zdefiniowana jest w przestrzeni lingwistycznej  $X_L$ , która jest zbiorem wszystkich wartości lingwistycznych.

Na przykład, zmienna „prędkość samochodu”  $\in X_L = \{„mała”, „średnia”, „duża”\}$ .

Ta druga należy do przestrzeni numerycznej  $X$ , która jest zbiorem wszystkich wartości numerycznych jakie może ta zmienna przyjąć.

Na przykład, zmienna numeryczna reprezentująca „prędkość samochodu” należy do zbioru/przedziału  $[0, 450]$  km/h.



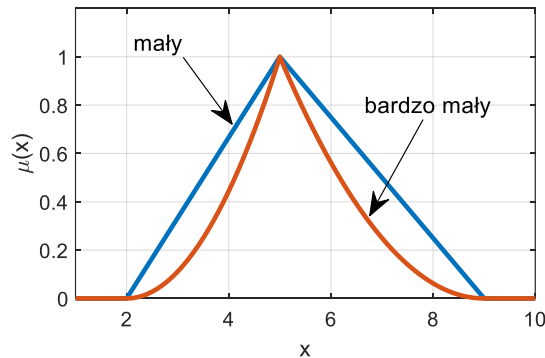
# ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

## Modyfikatory lingwistyczne zbiorów rozmytych

Wartość lingwistyczną można wzmocnić dodając przed nią modyfikator „**bardzo**”. Np. „bardzo duży”, „bardzo niski”, „bardzo średni”, „bardzo gruby”, „bardzo wolny”.

Modyfikator „bardzo” wyraża się za pomocą operacji koncentracji:

$$\mu_{\text{CON}(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$$



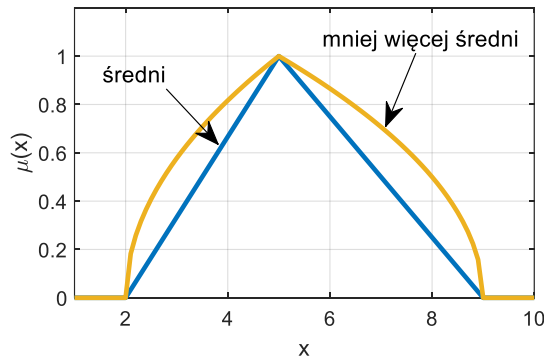
# ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

## Modyfikatory lingwistyczne zbiorów rozmytych

Wartość lingwistyczną można osłabić dodając przed nią modyfikator „trochę” lub „mniej więcej”. Np. „trochę duży”, „trochę niski”, „mniej więcej średni”, „mniej więcej gruby”, „trochę wolny”.

Modyfikator „trochę” lub „mniej więcej” wyraża się za pomocą operacji rozcieńczenia:

$$\mu_{\text{DIL}(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$$



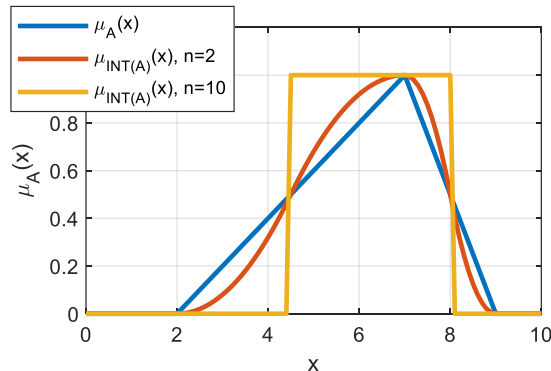
## ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

**Operator intensyfikacji kontrastu** umożliwia przybliżanie lub oddalanie zbioru rozmytego od klasycznego.

Intensyfikację kontrastu przeprowadza się według wzoru:

$$\mu_{\text{INT}(A)}(x) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^n & \text{dla } \mu_A(x) < 0,5 \\ 1 - 2(1 - \mu_A(x))^n & \text{dla } \mu_A(x) \geq 0,5 \end{cases}$$

Typowo  $n = 2$ . Intensyfikację można zwiększyć stosując potęgi wyższe niż 2. Gdy  $n \rightarrow \infty$  funkcja przynależności przyjmuje kształt prostokątny, a zbiór staje się zbiorem nierozmytym o „ostrych” granicach.



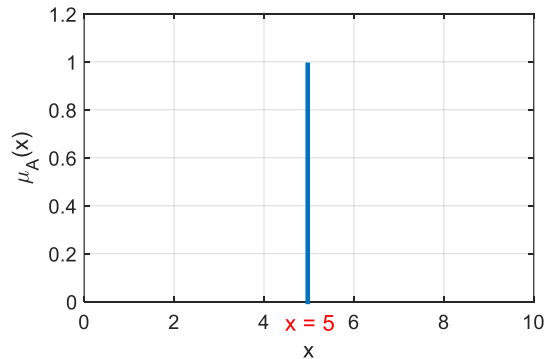
# ZBIORY ROZMYTE – DODATKOWE DEFINICJE

## Singleton

$$\mu_{(A)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = x_0 \\ 0 & \text{dla } x \neq x_0 \end{cases}$$

Singleton jest specyficzną funkcją przynależności, gdyż przyjmuje wartość 1 tylko w jednym punkcie przestrzeni  $X$ . W pozostałych punktach przyjmuje wartość 0.

Charakteryzuje zbiór jednoelementowy. Jedynym elementem w pełni należącym do zbioru rozmytego  $A$  jest  $x = x_0$ .





**Normy trójkątne** są stosowane do modelowania operacji iloczynu ( $t$ -normy) i sumy ( $s$ -normy lub  $t$ -konormy) zbiorów rozmytych.

Dla  $t$ -normy jako funkcji  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  przyjmujemy następujące aksjomaty:

- 1) funkcja  $T$  jest niemalejąca względem obu argumentów

$$T(x, y) \leq T(u, z) \text{ dla } x \leq u, y \leq z$$

- 2) funkcja  $T$  spełnia warunek przemienności

$$T(x, y) = T(y, x)$$

- 3) funkcja  $T$  spełnia warunek łączności

$$T(T(x, y), u) = T(x, T(y, u))$$

- 4) funkcja  $T$  spełnia warunki brzegowe

$$T(x, 1) = x \text{ oraz } T(x, 0) = 0$$

gdzie  $x, y, u, z \in [0, 1]$ .

Dla  $s$ -normy jako funkcji  $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  przyjmujemy następujące aksjomaty:

- 1) funkcja  $S$  jest niemalejąca względem obu argumentów

$$S(x, y) \leq S(u, z) \text{ dla } x \leq u, y \leq z$$

- 2) funkcja  $S$  spełnia warunek przemienności

$$S(x, y) = S(y, x)$$

- 3) funkcja  $S$  spełnia warunek łączności

$$S(S(x, y), u) = S(x, S(y, u))$$

- 4) funkcja  $T$  spełnia warunki brzegowe

$$S(x, 1) = 1 \text{ oraz } S(x, 0) = x$$

gdzie  $x, y, u, z \in [0, 1]$ .

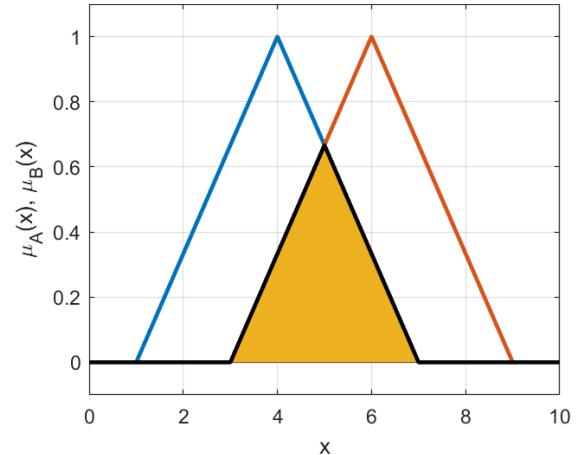
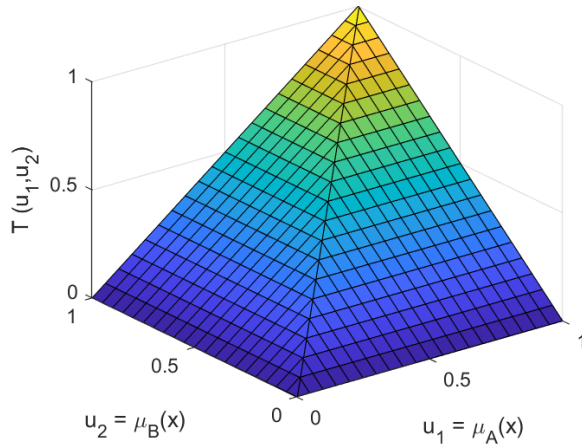
# NORMY TRÓJKĄTNE

Parametry  $x, y, u, z \in [0, 1]$  utożsamiamy z funkcjami przynależności do zbiorów rozmytych.

Definicje  $t$ -normy można uogólnić na przypadek wielu zmiennych.

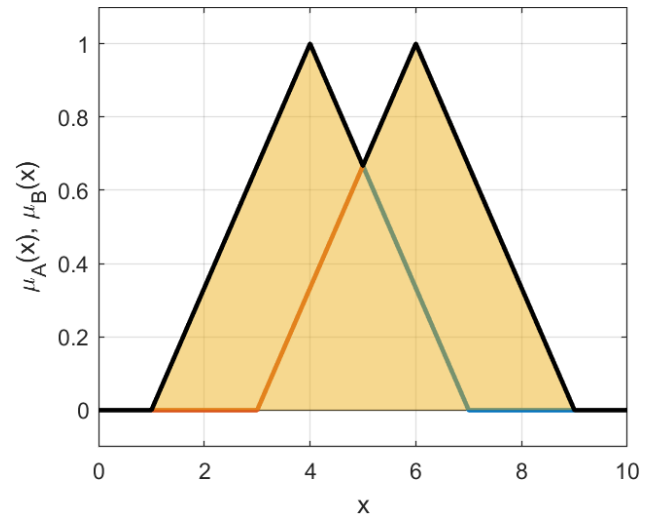
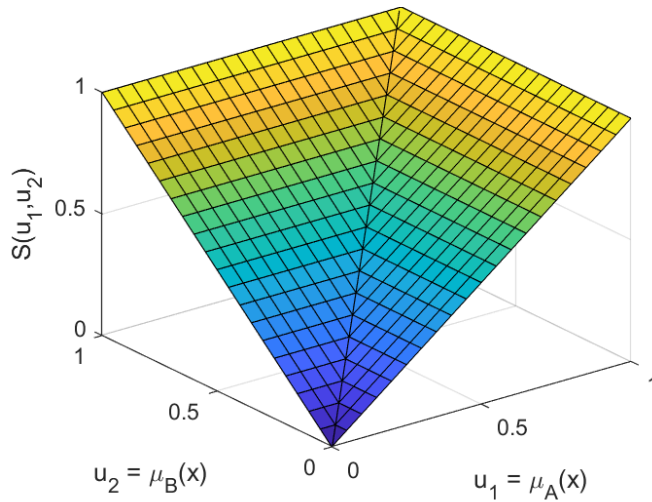
## Normy Zadeha

$$T(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$$



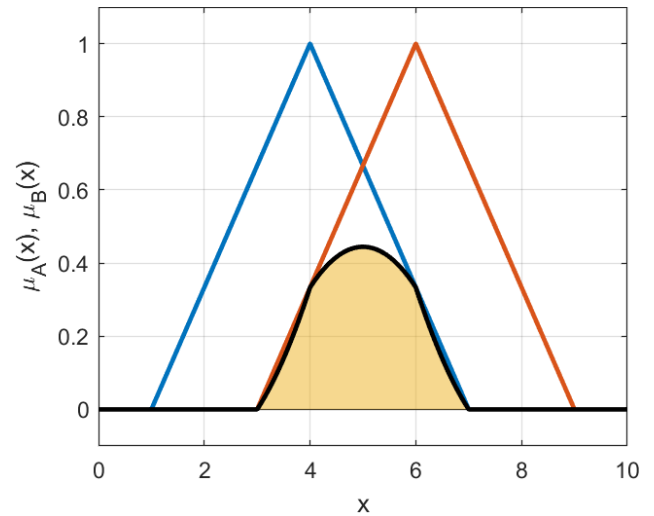
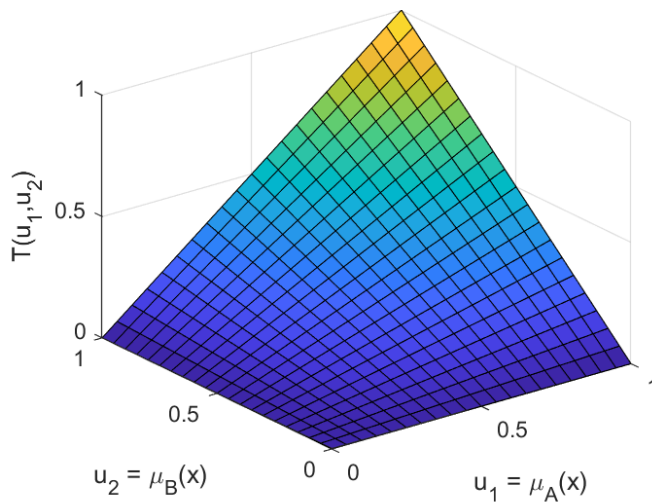
## Normy Zadeha

$$S(u_1, u_2) = \max(u_1, u_2)$$



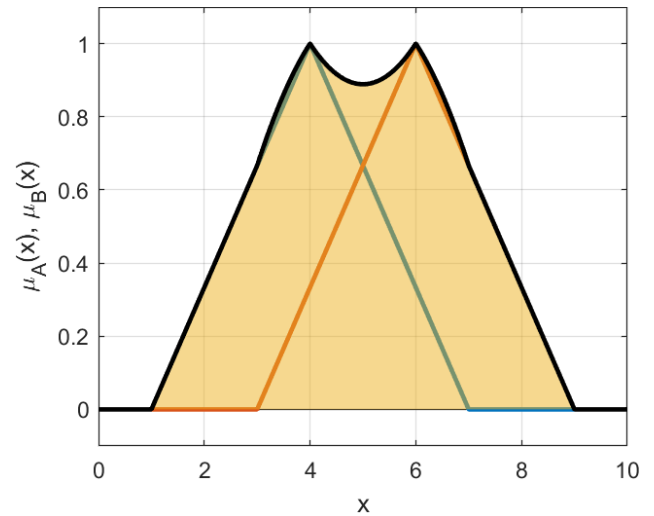
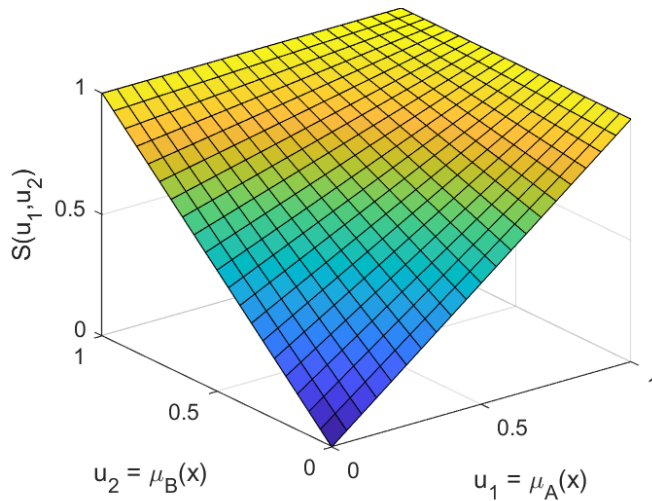
## Normy algebraiczne

$$T(u_1, u_2) = u_1 u_2$$



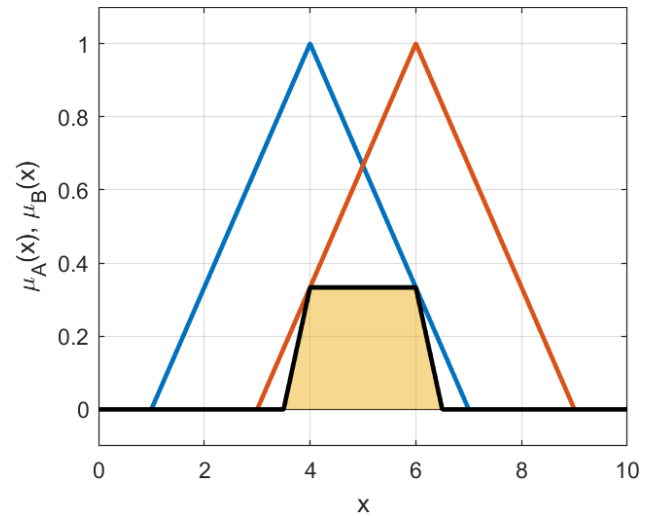
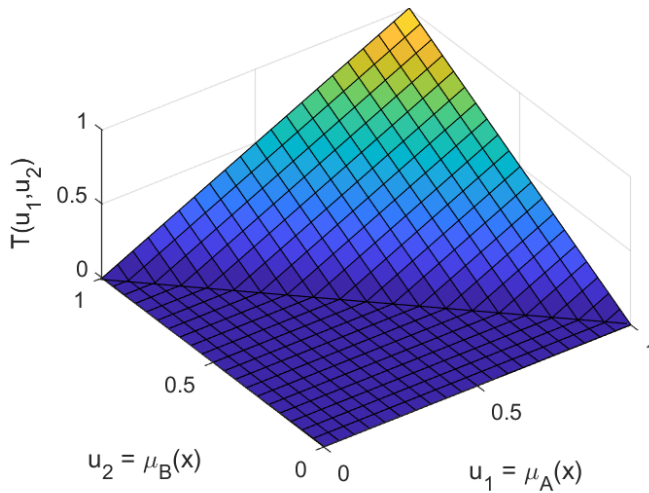
## Normy algebraiczne

$$S(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - u_1 u_2$$



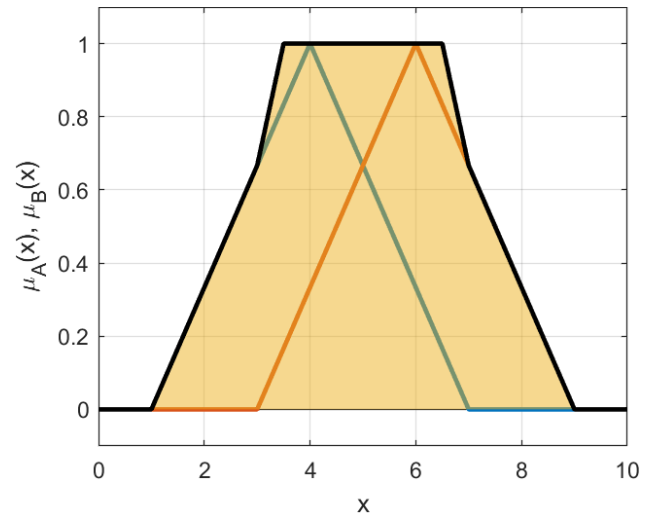
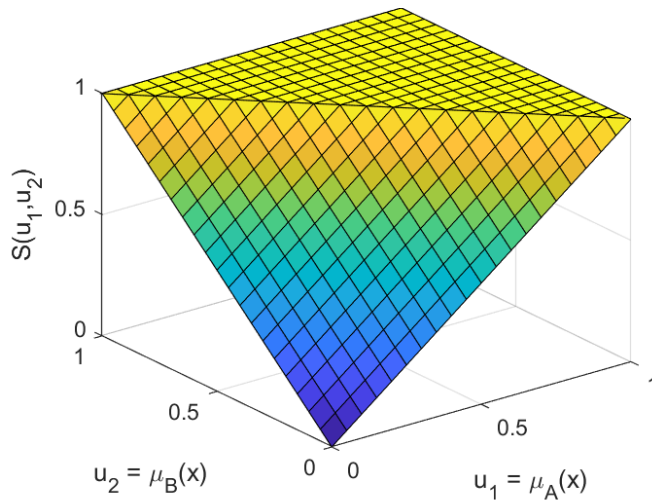
## Normy Łukasiewicza

$$T(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$$



## Normy Łukasiewicza

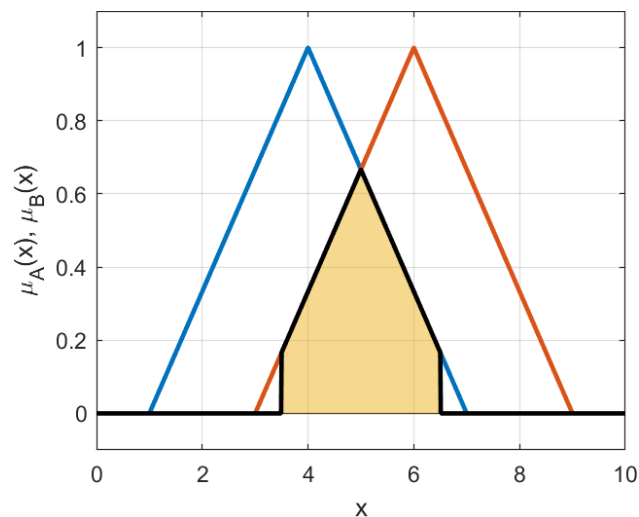
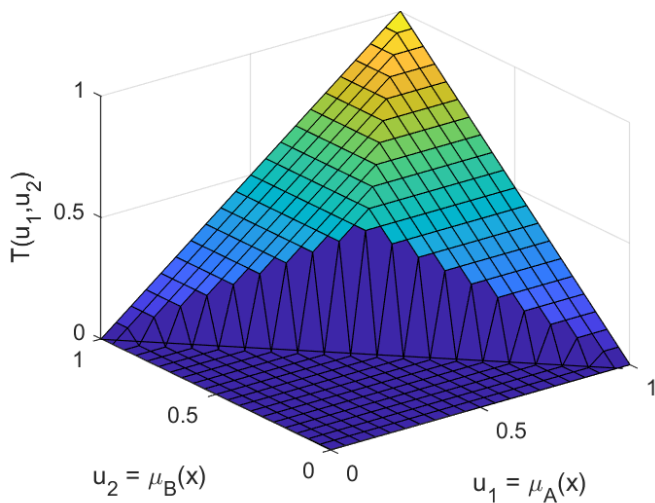
$$S(u_1, u_2) = \min(u_1 + u_2, 1)$$





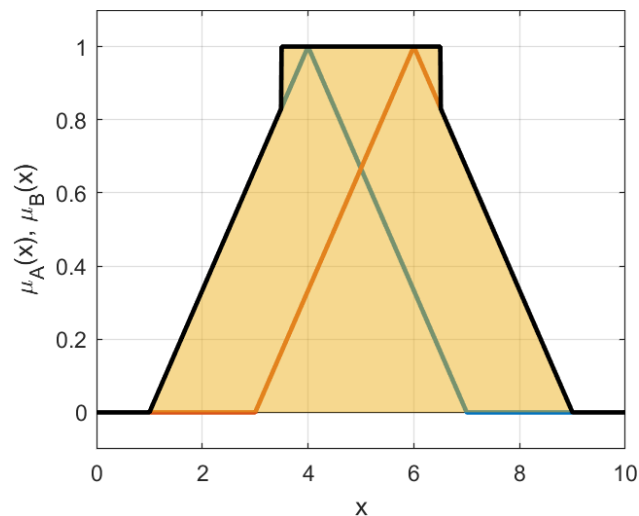
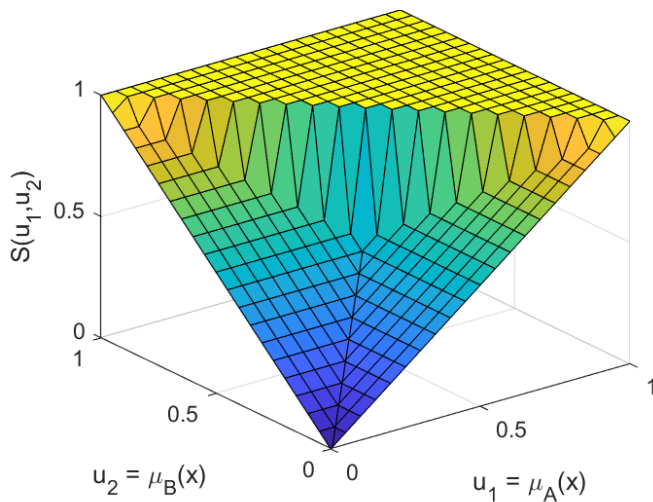
## Normy Fodora

$$T(u_1, u_2) = \begin{cases} \min(u_1, u_2) & \text{dla } u_1 + u_2 > 1 \\ 0 & \text{dla } u_1 + u_2 \leq 1 \end{cases}$$



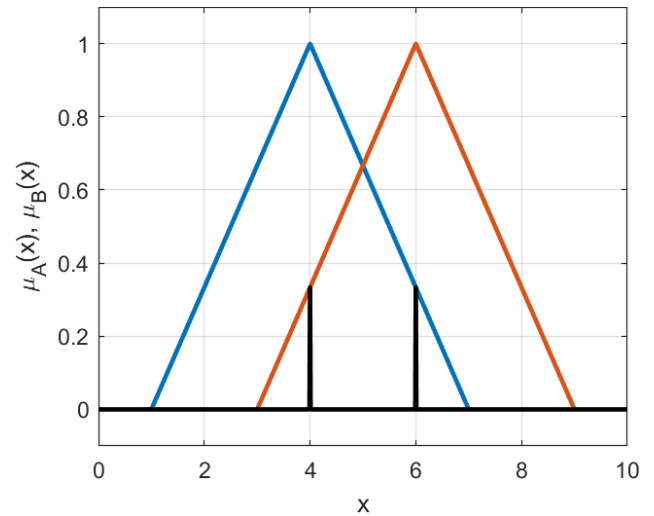
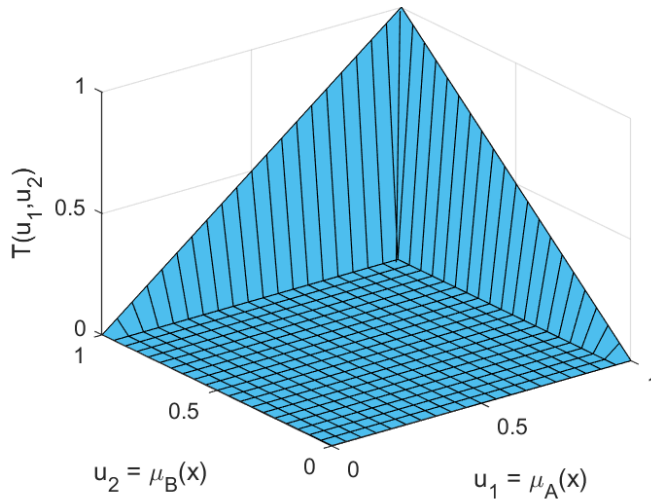
## Normy Fedora

$$S(u_1, u_2) = \begin{cases} \max(u_1, u_2) & \text{dla } u_1 + u_2 < 1 \\ 1 & \text{dla } u_1 + u_2 \geq 1 \end{cases}$$



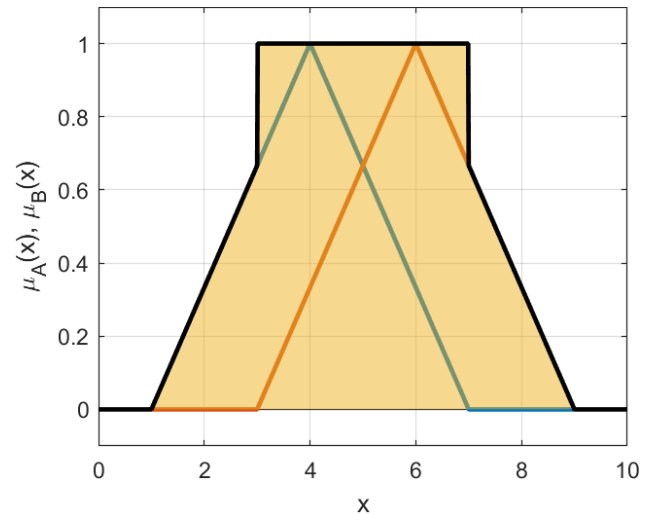
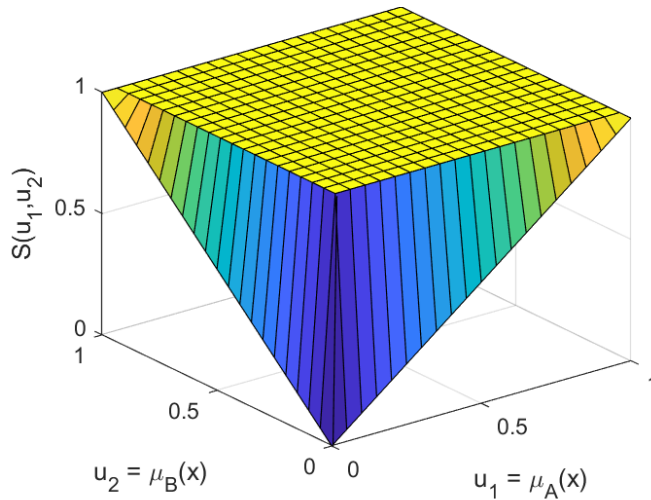
## Normy drastyczne

$$T(u_1, u_2) = \begin{cases} \min(u_1, u_2) & \text{dla } \max(u_1, u_2) = 1 \\ 0 & \text{dla } \max(u_1, u_2) \neq 1 \end{cases}$$



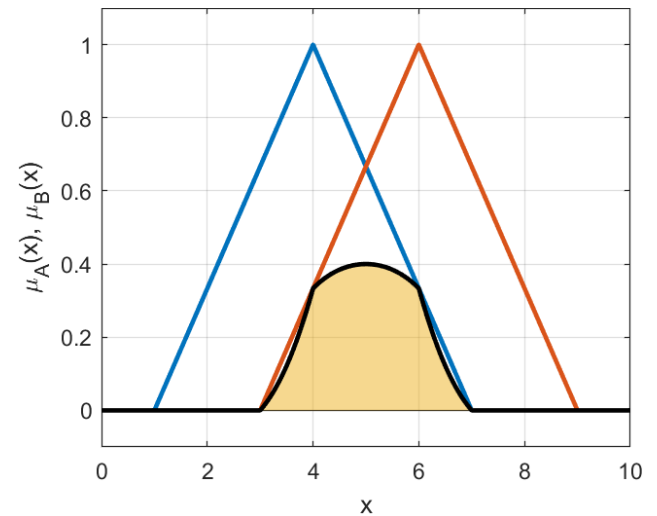
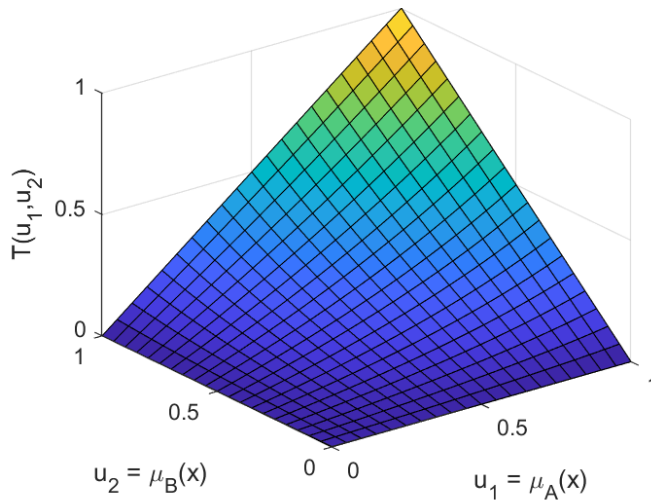
## Normy drastyczne

$$S(u_1, u_2) = \begin{cases} \max(u_1, u_2) & \text{dla } \min(u_1, u_2) = 0 \\ 1 & \text{dla } \min(u_1, u_2) \neq 0 \end{cases}$$



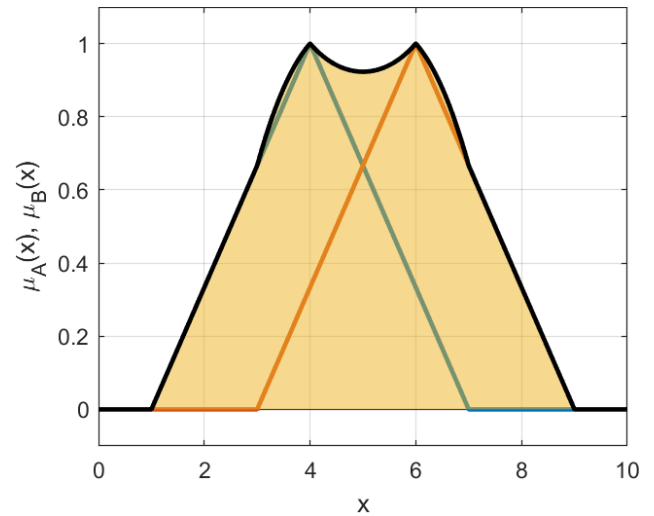
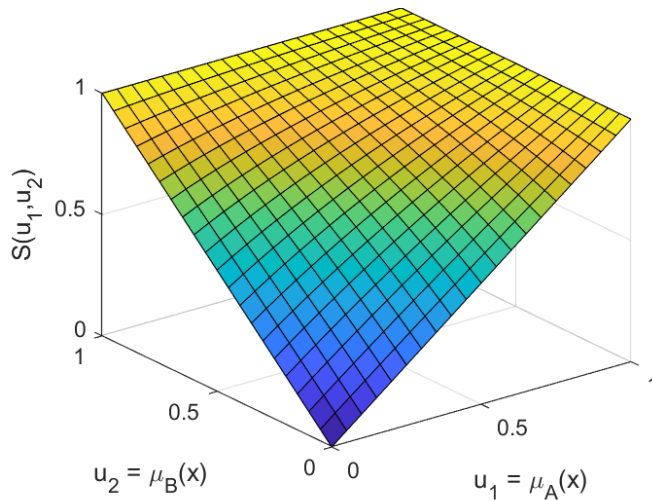
## Normy Einsteina

$$T(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{2 - (u_1 + u_2 - u_1 u_2)}$$



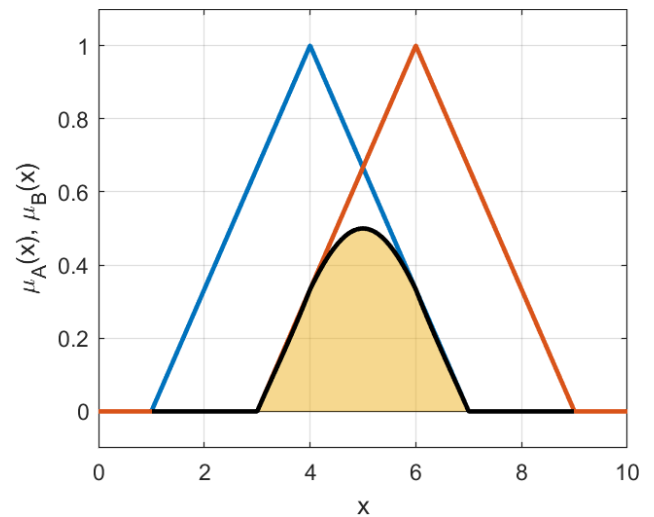
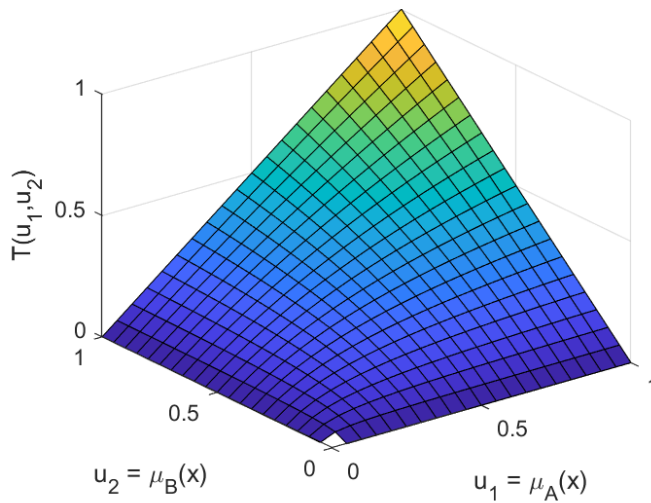
## Normy Einsteina

$$S(u_1, u_2) = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2}$$



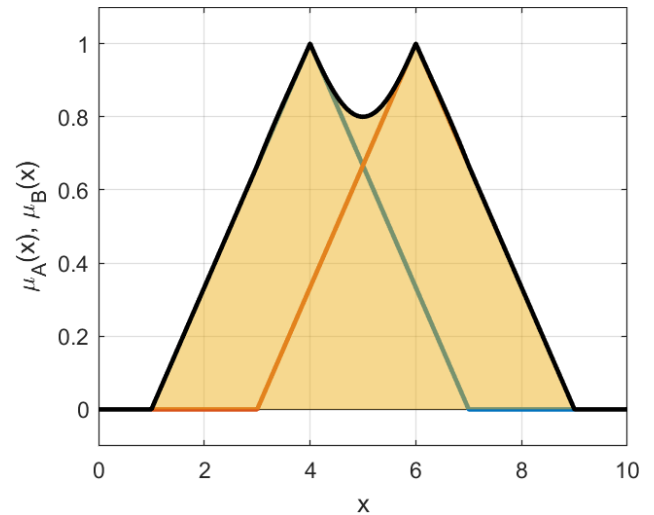
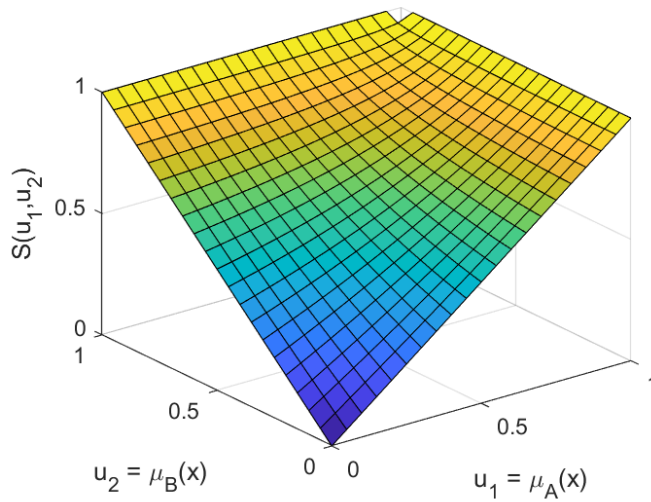
## Normy Hamachera

$$T(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2}$$



## Normy Hamachera

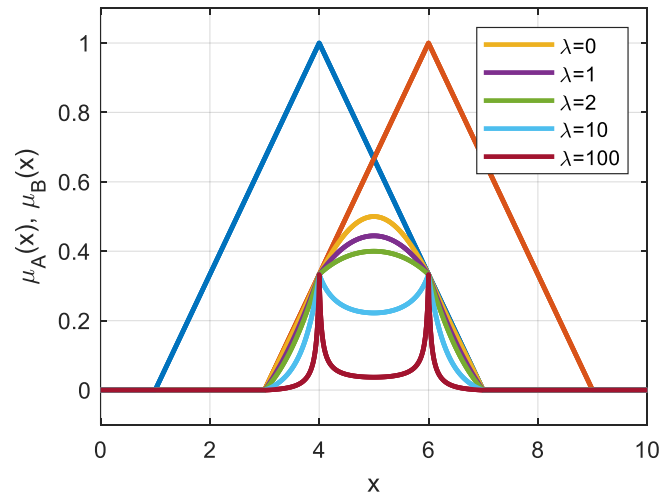
$$S(u_1, u_2) = \frac{u_1 + u_2 - 2u_1u_2}{1 - u_1u_2}$$





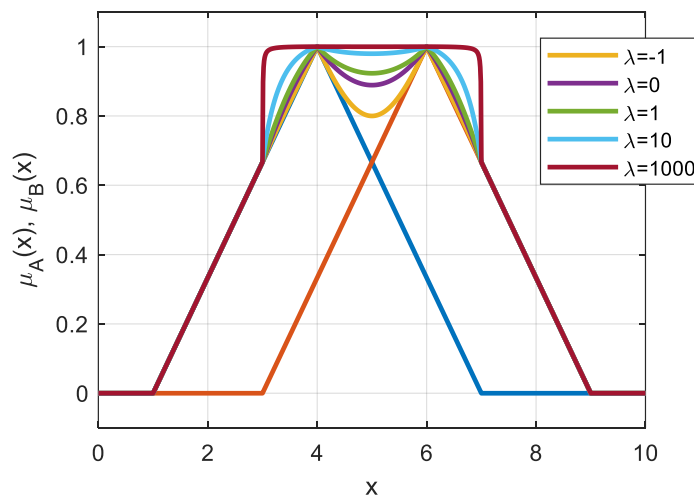
## Parametryczne normy Hamachera

$$T(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{\gamma + (1 - \gamma)(u_1 + u_2 - u_1 u_2)}, \quad \gamma \geq 0$$



## Parametryczne normy Hamachera

$$S(u_1, u_2) = \frac{u_1 + u_2 + (\gamma - 1)u_1u_2}{1 + \gamma u_1u_2}, \quad \gamma \geq -1$$



Negacje są rozszerzeniami logicznego zaprzeczenia.

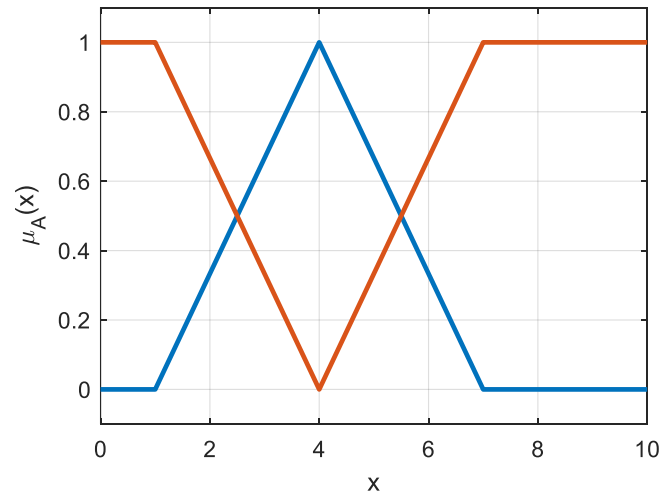
Nierosnącą funkcję  $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  nazywamy negacją, jeżeli  $N(0) = 1$  i  $N(1) = 0$ .

Negację  $N$  nazywamy negacją **ściłą** (typu *strict*), jeżeli jest ciągła i malejąca.

Negację ściłą  $N$  nazywamy **silną** (typu *strong*), jeżeli jest inwolucją, tzn.  $N(N(u)) = u$ .

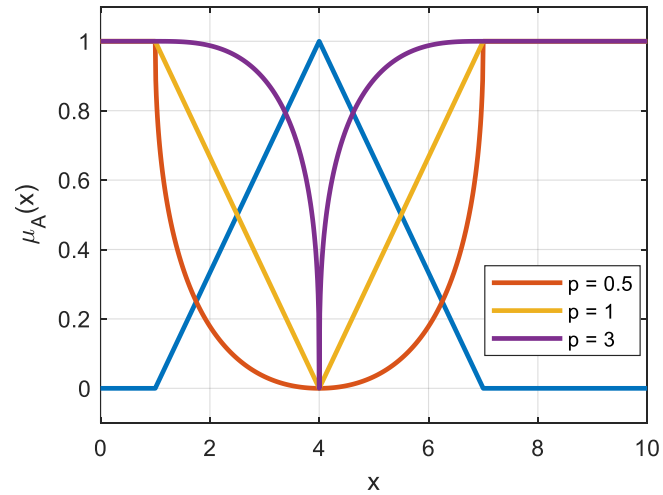
## Negacja Zadeha

$$N(u) = 1 - u$$



## Negacja Yagera

$$N(u) = (1 - u^p)^{1/p}, \quad p > 0$$



## Negacija Sugeno

$$N(u) = \frac{1-u}{1+pu}, \quad p > -1$$

