

MODELOWANIE ROZMYTE

ZBIORY ROZMYTE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

ZBIORY ROZMYTE - HISTORIA

1961 – Lofti Zadeh: „*Od teorii obwodów do teorii systemów*”

1966 – L. Zadeh: „*Fuzzy sets*”

1969 – E. Ruspini: „*A new approach to clustering*”

1973 – L. Zadeh: „*Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*”

Zasada niekompatybilności: Jeżeli skomplikowanie systemu wzrasta, nasza zdolność formułowania precyzyjnych i wciąż wiarygodnych stwierdzeń o jego zachowaniu zmniejsza się, a po przekroczeniu pewnego skomplikowania precyzja i wiarygodność wzajemnie się wykluczają.

1975 – E. Mamdani, S. Assilan: Zaprojektowanie regulatru rozmytego do sterowania silnikiem parowym

1978 – L. Zadeh: Teoria możliwości

Lata 80-te XX wieku – era zastosowań teorii zbiorów rozmytych

1996 – L. Zadeh: Obliczenia na słowach

1998 – L. Zadeh: Operowanie na percepcjach

Lofti Zadeh



Ebrahim Mamdani



Ronald Yager



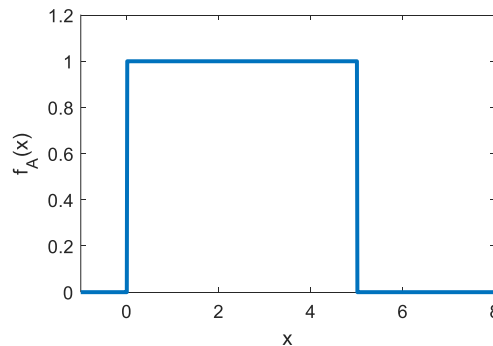
TEORIA ZBIORÓW ROZMYTYCH

- matematyka rozmyta – klasyczne pojęcia z matematyki są rozszerzone przez zastąpienie zbiorów klasycznych rozmytymi, na przykład: miara rozmyta, całka rozmyta, arytmetyka rozmyta, relacja rozmyta itd.
- logika rozmyta – logika klasyczna jest rozszerzana na pojęcia nieprecyzyjne; logika rozmyta jest szczególnie przydatna do tworzenia systemów eksperckich,
- systemy rozmyte – przy zastosowaniu zbiorów rozmytych projektujemy systemy przetwarzania sygnałów i obrazów, transmisji danych oraz podejmowania decyzji, na przykład systemy sterowania
- optymalizacja rozmyta – optymalizacja jest wykonywana przy rozmytych ograniczeniach,
- rozmyta niepewność i informacja – analizuje się różne rodzaje niepewności, miary rozmytości oraz pojęcie możliwości.

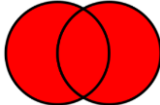
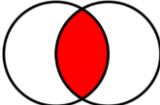
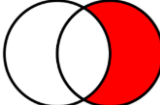
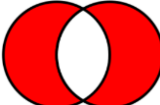
Klasyczne pojęcie zbioru związane jest z logiką dwuwartościową (Boole'a). Dla każdego zbioru A zawartego w pewnej przestrzeni (zbiorze) X istnieje tzw. **funkcja charakterystyczna** $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, która określa, czy dany element $x \in X$ należy do A , czy też nie:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A \end{cases}$$

Na przykład dla zbioru liczb rzeczywistych z przedziału od 0 do 5 funkcja charakterystyczna ma postać:



Podstawowe operacje na zbiorach

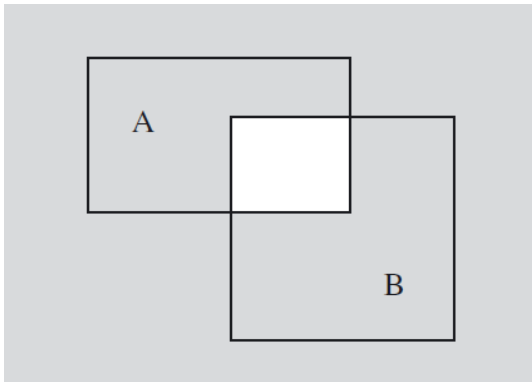
Operacja	Schematy Venna
Suma $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ lub } x \in B\}$	
Iloczyn $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$	
Dopełnienie $\bar{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$	
Różnica $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$	
Różnica symetryczna $A \cdot \setminus \cdot B = \{x \in X \mid x \in A \setminus B \text{ lub } x \in B \setminus A\}$	

Własności

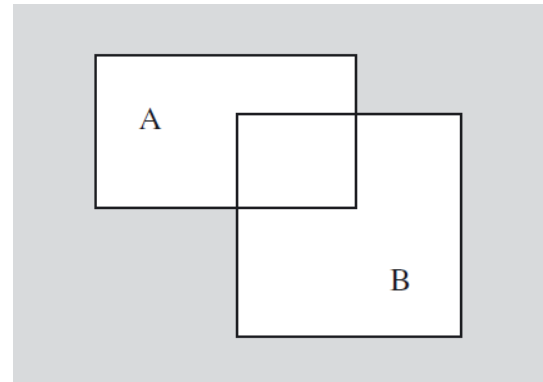
Przemienność	<i>Commutativity</i>	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A.$
Łączność	<i>Associativity</i>	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
Rozdzielność	<i>Distributivity</i>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
Idempotentność	<i>Idempotency</i>	$A \cup A = A$ $A \cap A = A.$
Identyczność	<i>Identity</i>	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap X = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset.$ $A \cup X = X.$
Przechodność	<i>Transitivity</i>	If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$.
Inwolucja	<i>Involution</i>	$\overline{\overline{A}} = A.$

Prawa de Morgana

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



Dla wielu zbiorów:

$$\overline{E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \dots \cap \overline{E_n}$$

$$\overline{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \dots \cup \overline{E_n}$$

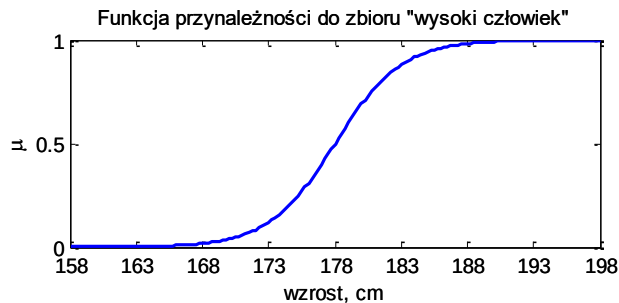
W przypadku zbiorów rozmytych elementom x przypisuje się **stopień przynależności** do zbioru A . Funkcja przynależności odwzorowuje elementy zbioru na przedział $[0, 1]$:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$$

Zerowy stopień przynależności informuje, że element nie należy do zbioru.

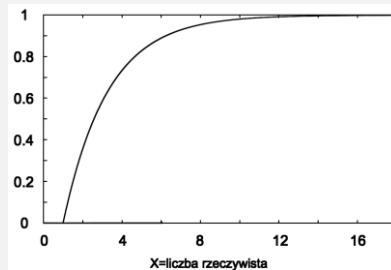
Jedynka oznacza całkowitą przynależność.

Wartości pośrednie oznaczają częściową przynależność x do A .

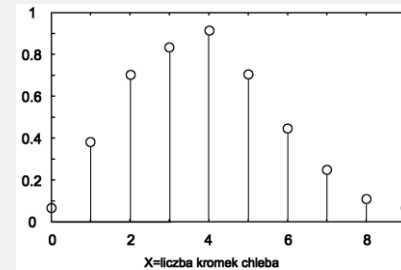


Przykłady:

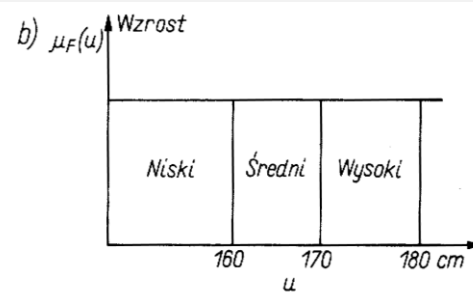
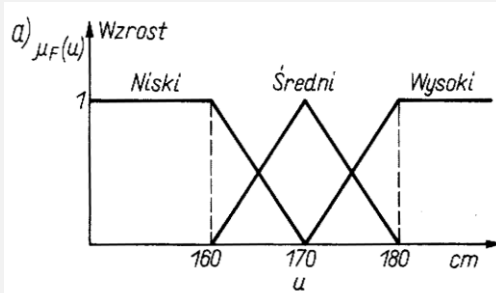
Funkcja przynależności do zbioru "liczby dużo większe od 1"



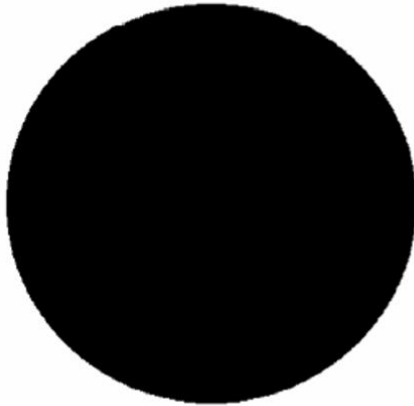
Funkcja przynależności do zbioru "liczba kromek zjadanych na śniadanie"



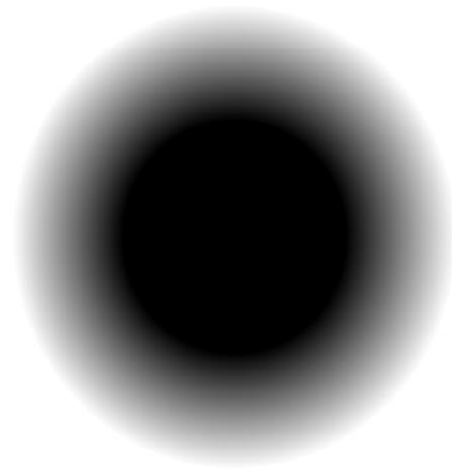
Funkcje przynależności do zbiorów rozmytych i "ostrych"



Zbiór klasyczny



Zbiór rozmyty



ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Za pomocą zbiorów rozmytych możemy formalnie określić pojęcia nieprecyzyjne i wieloznaczne, takie jak "wysoka temperatura", "młody człowiek", "średni wzrost" lub "duże miasto". Są to pojęcia opisowe (**wielkości lingwistyczne**), nieostre, rozmyte, nie związane ściśle z wartościami numerycznymi. Zrozumiałe dla człowieka, ale trudne do przedstawienia w postaci numerycznej.

Zbiór rozmyty – zbiór uporządkowanych par $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Centrum zbioru rozmytego A – zbiór takich punktów $x \in A$, w których $\mu_A(x) = 1$

Nośnik zbioru rozmytego A – zbiór takich punktów $x \in A$, w których $\mu_A(x) > 0$

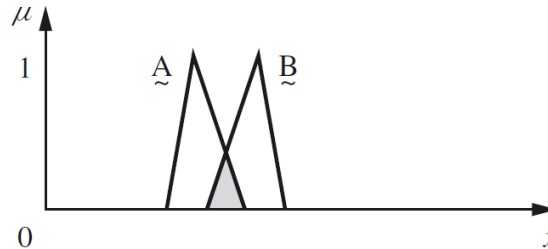
Wysokość zbioru rozmytego A – supremum (kres górny) wartości funkcji przynależności zbioru A : $\sup \mu_A(x)$, dla $x \in X$

ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Przecięcie dwu zbiorów rozmytych A i B (iloczyn, część wspólna) – $A \cap B$, zbiór rozmyty o funkcji przynależności

$$\mu_{A \cap B}(x) = t(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie t jest tzw. **t -normą**. Najczęściej ma ona postać $t(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

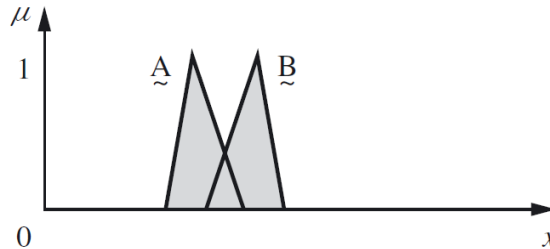


ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Suma dwu zbiorów rozmytych A i B – $A \cup B$, zbiór rozmyty o funkcji przynależności

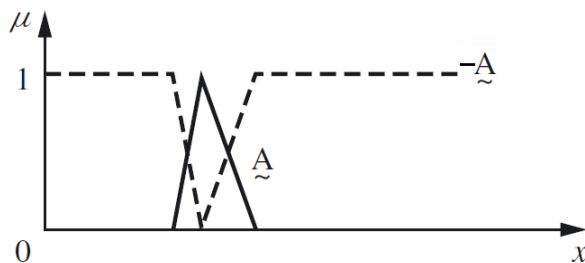
$$\mu_{A \cup B}(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie s jest tzw. **s-normą**. Najczęściej ma ona postać $s(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$



Dopełnienie zbioru rozmytego A ($-A$) – zbiór rozmyty o funkcji przynależności

$$\mu_{-A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Zbiór rozmyty A **zawiera się** w zbiorze rozmytym B , gdy

$$\forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

Zbiór rozmyty A **jest równy** zbiorowi rozmytemu B , gdy

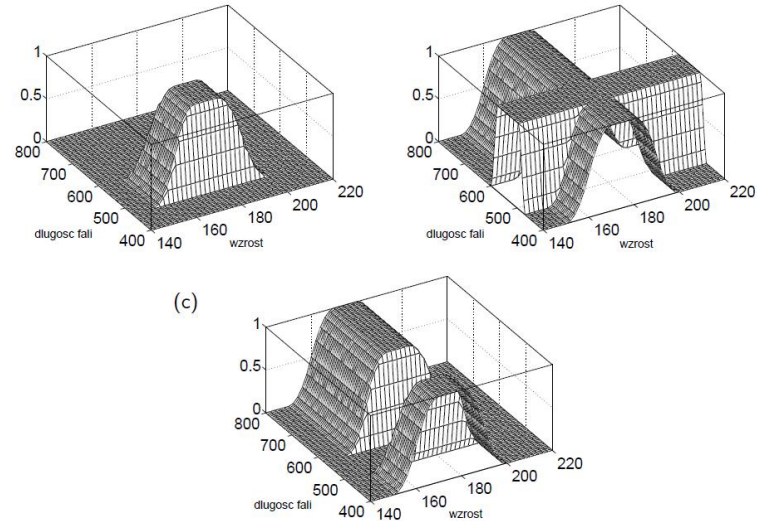
$$\forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ZBIORY ROZMYTE – DEFINICJE

Iloczyn (produkt) kartezjański dwu zbiorów rozmytych A i B zdefiniowanych w przestrzeniach X i Y – zbiór rozmyty w przestrzeni $X \times Y$ o funkcji przynależności

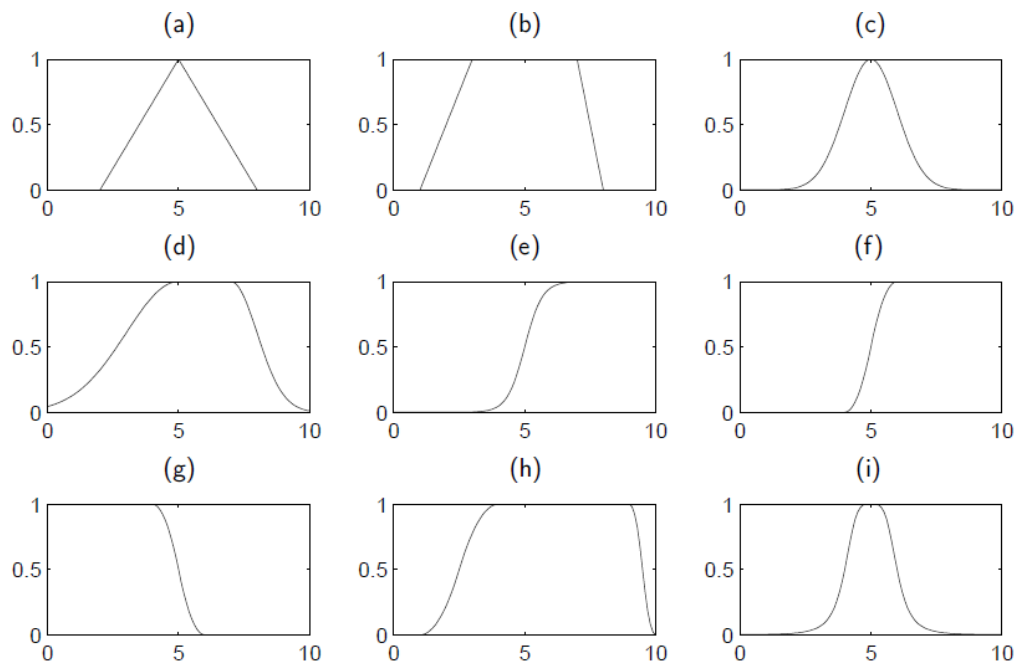
$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Suma (koprodukt) kartezjańska dwu zbiorów rozmytych A i B zdefiniowanych w przestrzeniach X i Y – zbiór rozmyty w przestrzeni $X \times Y$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A+B}(x, y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y))$$


Rys. 5.7: Funkcje przynależności podzbiorów: (a) *średniego wzrostu i zielonooki*, (b) *średniego wzrostu lub zielonooki* i (c) *średniego wzrostu i nie zielonooki*

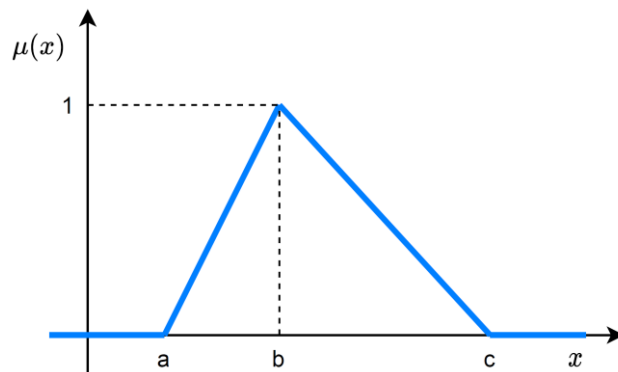
FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI



Rys. 5.4: Typowe funkcje przynależności: (a) trójkąt, (b) trapez, (c) funkcja Gaussa, (d) asymetryczna funkcja Gaussa, (e) funkcja sigmoidalna, (f) funkcja typu s, (g) funkcja typu z, (h) funkcja typu π , (i) uogólniona funkcja dzwonowa

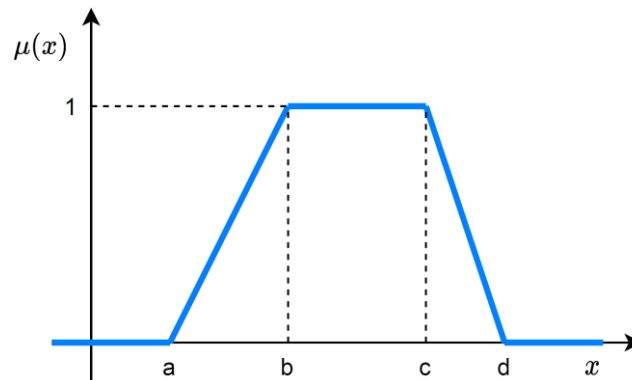
Funkcja trójkątna

$$\mu(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{dla } b < x < c \\ 0 & \text{dla } x \geq c \end{cases}$$



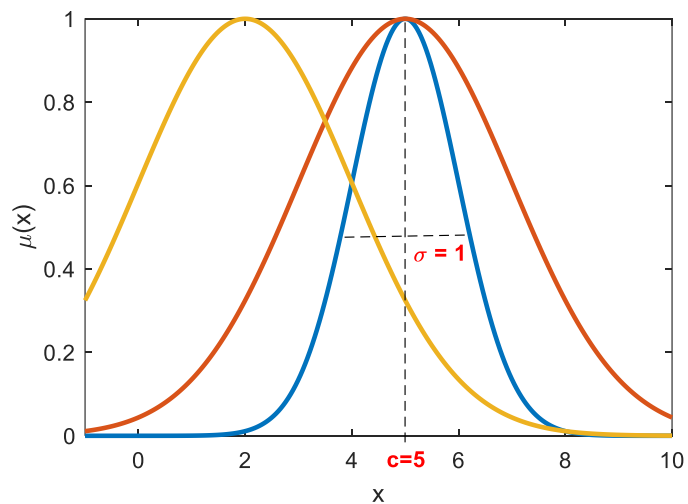
Funkcja trapezowa

$$\mu(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \leq b \\ 1 & \text{dla } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{dla } c < x < d \\ 0 & \text{dla } x > d \end{cases}$$



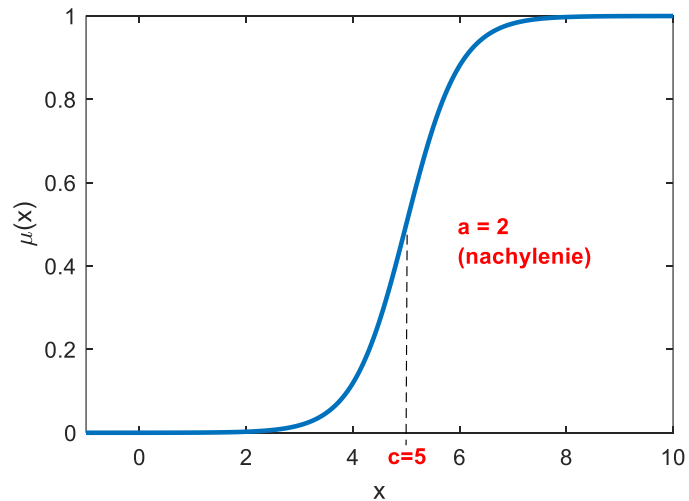
Funkcja Gaussa

$$g(x, \sigma, c) = \exp\left(\frac{-(x - c)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Funkcja sigmoidalna

$$si(x, a, c) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x - c))}$$

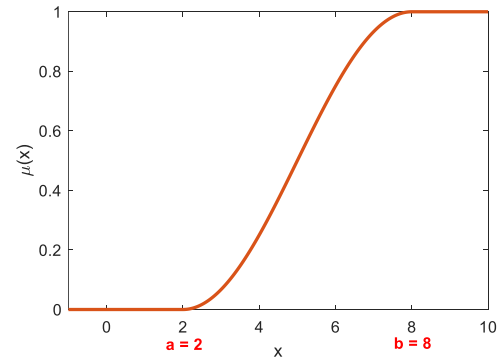
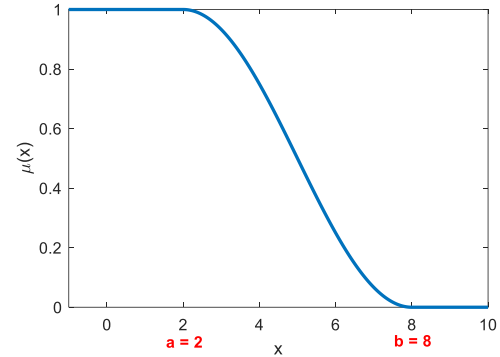


FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

Funkcje typu z i s

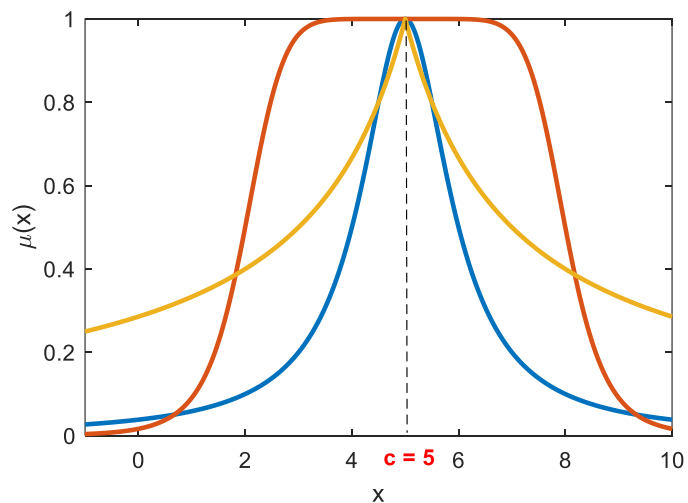
$$s(x, a, b) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & \text{dla } a < x \leq b \\ 0 & \text{dla } x \geq b \end{cases}$$

$$s(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x-b}{b-a}\right) & \text{dla } a < x \leq b \\ 1 & \text{dla } x \geq b \end{cases}$$



Uogólniona funkcja dzwonowa

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$



FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

Funkcje przynależności mogą być wieloargumentowe. Np. przynależność do podzbioru rozmytego "wysoki na swój wiek" jest zależna od dwóch argumentów: wzrostu i wieku. Innym przykładem może być funkcja przynależności do zbioru "liczba x dużo większa od liczby y".

