

MODELOWANIE ROZMYTE

PODEJMOWANIE DECYZJI W OTOCZENIU ROZMYTYM

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Otoczenie rozmyte składa się z:

- celów rozmytych
- ograniczeń rozmytych
- decyzji rozmytej

Rozważa się pewien zbiór **opcji** (wyborów/wariantów decyzji) $X_{op} = \{x\}$.

Cel rozmyty to zbiór rozmyty G określony w zbiorze opcji i opisany funkcją przynależności $\mu_G(x): X_{op} \rightarrow [0, 1]$. $\mu_G(x)$ informuje na ile opcja x spełnia cel G .

Ograniczenie rozmyte to zbiór rozmyty C określony w zbiorze opcji i opisany funkcją przynależności $\mu_C(x): X_{op} \rightarrow [0, 1]$. $\mu_C(x)$ informuje w jakim stopniu opcja x spełnia ograniczenie C .

Decyzja rozmyta to zbiór rozmyty D powstały w wyniku przecięcia (iloczyn) zbiorów G i C :

$$D = G \cap C$$

przy czym

$$\mu_D(x) = t(\mu_G(x), \mu_C(x))$$

gdzie $t(.,.)$ to t -norma, która najczęściej przybiera postać $\min(.,.)$.

W przypadku wielu celów i wielu ograniczeń możemy przyjąć:

$$D = G_1 \cap \dots \cap G_n \cap C_1 \cap \dots \cap C_m$$

$$\mu_D(x) = t(\mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \dots, \mu_{C_m}(x))$$

Szukamy takiej opcji $x^* \in X_{op}$, dla której osiągamy maksimum $\mu_D(x)$:

$$x^* = \arg \max_{x \in X_{op}} \mu_D(x)$$

Polityka zatrudnienia

Rozważmy firmę, która ogłosiła konkurs na stanowisko asystenta dyrektora. Podczas rozmowy kwalifikacyjnej kandydaci pytani są o rodzaj posiadanych kwalifikacji, doświadczenie, wiedzę w danej dziedzinie itp. W naszym przypadku ustalono następujące kryteria oceny kandydatów:

- G_1 — doświadczenie,
- G_2 — znajomość obsługi komputera,
- G_3 — młody wiek,
- G_4 — znajomość języka obcego.

Celem firmy jest znalezienie na stanowisko asystenta dyrektora najlepszego kandydata, który zaakceptuje oferowane przez przedsiębiorstwo wynagrodzenie. Poszczególni kandydaci x_k , $k = 1, \dots, 4$ oceniani są z punktu widzenia osiągnięcia celów G_1 , G_2 , G_3 i G_4 oraz spełnienia ograniczenia C . Wynikiem tej oceny są zbiory rozmyte zdefiniowane na zbiorze $X_{\text{op}} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Przykład 1

$$\begin{aligned}G_1 &= \frac{0,7}{x_1} + \frac{0,2}{x_2} + \frac{0,5}{x_3} + \frac{0,3}{x_4}, \\G_2 &= \frac{0,8}{x_1} + \frac{0,8}{x_2} + \frac{0,5}{x_3} + \frac{0,2}{x_4}, \\G_3 &= \frac{0,7}{x_1} + \frac{0,8}{x_2} + \frac{0,4}{x_3} + \frac{0,5}{x_4}, \\G_4 &= \frac{0,5}{x_1} + \frac{0,6}{x_2} + \frac{0,7}{x_3} + \frac{0,8}{x_4}.\end{aligned}$$

Ograniczenie C oznacza gotowość kandydatów do zaakceptowania oferowanego przez firmę wynagrodzenia i zdaniem firmy przedstawia się następująco:

$$C = \frac{0,3}{x_1} + \frac{0,4}{x_2} + \frac{0,6}{x_3} + \frac{0,9}{x_4}.$$

Decyzję D wyznaczamy na podstawie następującego wzoru:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap C.$$

W wyniku prostych obliczeń otrzymujemy

$$D = \frac{0,3}{x_1} + \frac{0,2}{x_2} + \frac{0,4}{x_3} + \frac{0,2}{x_4}.$$

Kandydat nr 3 charakteryzuje się największym stopniem przynależności równym 0,4, w związku z tym jest on najlepszym kandydatem na oferowane przez firmę stanowisko. Przedstawiony w naszym przykładzie model decyzyjny dla polityki zatrudnienia może być stosowany w podobnych sytuacjach.

Polityka mieszkaniowa

Rada miejska zamierza wprowadzić politykę mieszkaniową dla rodzin z niskimi dochodami, zamieszkujących stare budownictwo zlokalizowane na dużych działkach. Rozpatruje się trzy alternatywne projekty:

- x_1 — remont i zarządzanie budynkami,
- x_2 — program TBS (Towarzystwo Budownictwa Społecznego),
- x_3 — preferencyjny kredyt na zakup nowego mieszkania.

Zbiorem opcji jest $X_{op} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Projekty te będą wymagały częściowego lub pełnego przeniesienia rodzin. Rada miejska po zapoznaniu się z opiniami ekspertów zaproponowała trzy cele i dwa ograniczenia opisane przez zbiory rozmyte zdefiniowane na X_{op} . Przedstawiają się one następująco:

$$\text{„Poprawa standardu życia mieszkańców”} = G_1 = \frac{0,7}{x_1} + \frac{0,8}{x_2} + \frac{0,9}{x_3},$$

$$\text{„Większa liczba mieszkań na tym samym terenie”} = G_2 = \frac{0}{x_1} + \frac{0,9}{x_2} + \frac{0,9}{x_3},$$

$$\text{„Lepsze warunki mieszkaniowe”} = G_3 = \frac{0,3}{x_1} + \frac{0,7}{x_2} + \frac{0,8}{x_3},$$

$$\text{„Rozsądny koszt”} = C_1 = \frac{0,8}{x_1} + \frac{0,6}{x_2} + \frac{0,3}{x_3},$$

$$\text{„Krótki czas realizacji”} = C_2 = \frac{0,9}{x_1} + \frac{0,2}{x_2} + \frac{0,7}{x_3}.$$

Decyzję rozmytą wyznaczamy w sposób następujący:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap C_1 \cap C_2.$$

Dla t -normy typu minimum otrzymujemy

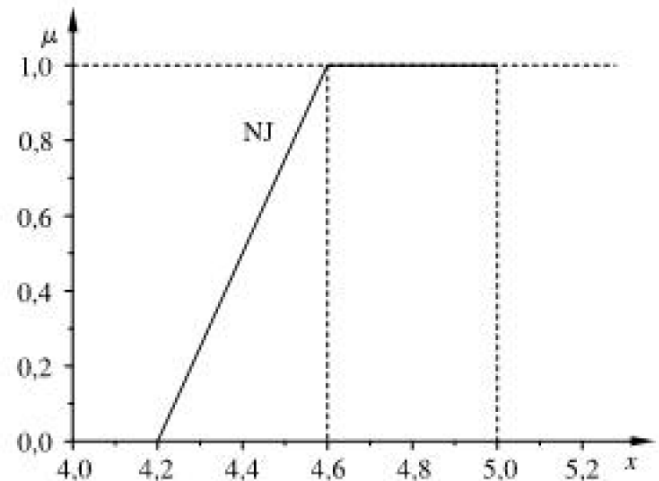
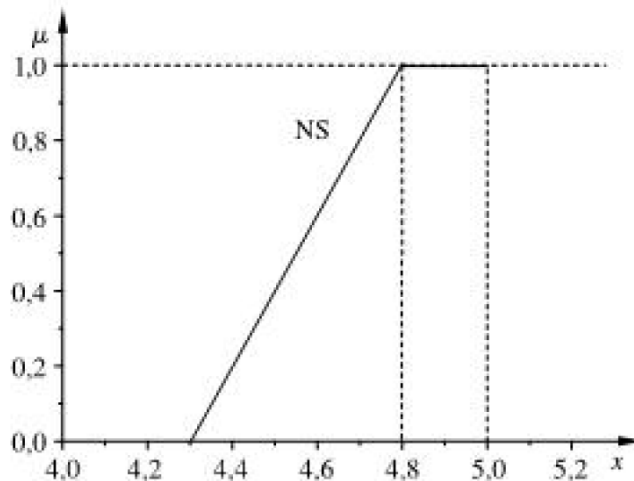
$$D = \frac{0}{x_1} + \frac{0,2}{x_2} + \frac{0,3}{x_3}.$$

Projekt x_3 z największym stopniem przynależności 0,3 okazał się najlepszym rozwiązaniem.

Przykład 3

Ocena studentów

Firma ufundowała wakacyjne praktyki dla studentów, którzy uzyskali najlepsze wyniki z przedmiotów ścisłych (elektronika, informatyka, matematyka) oraz z języków (angielski, niemiecki). Słowo *najlepszy* to wartość lingwistyczna, którą opisano oddzielnie dla przedmiotów ścisłych (NS) i języków (NJ) i przedstawiono na rysunku



Funkcje przynależności zbiorów rozmytych NS i NJ są następujące:

$$\mu_{NS}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2 \leq x \leq 4,3; \\ \frac{x - 4,3}{0,5} & \text{dla } 4,3 \leq x \leq 4,8; \\ 1 & \text{dla } 4,8 \leq x \leq 5, \end{cases} \quad (4.349)$$

oraz

$$\mu_{NJ}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2 \leq x \leq 4,2; \\ \frac{x - 4,2}{0,4} & \text{dla } 4,2 \leq x \leq 4,6; \\ 1 & \text{dla } 4,6 \leq x \leq 5. \end{cases} \quad (4.350)$$

Przykład 3

Studentom, którzy uzyskali z przedmiotów ścisłych średnią 4,8 i wyższą, przyporządkowuje się stopień przynależności równy 1. W przypadku języków analogiczna wartość średnia wynosi 4,6. W naszym przykładzie sześciu studentów (x_1 = Kasia, x_2 = Małgosia, x_3 = Ania, x_4 = Tomek, x_5 = Jacek, x_6 = Michał) ubiega się o miejsce na wakacyjnych praktykach. Zbiorem opcji jest $X_{op} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. W tabeli 4.15 zostały zamieszczone średnie ocen studentów z poszczególnych przedmiotów.

Tabela 4.15. Średnia ocen studentów z poszczególnych przedmiotów

Student	Elektronika	Informatyka	Matematyka	Angielski	Niemiecki
Kasia (x_1)	4,8	5,0	4,7	4,3	4,7
Małgosia (x_2)	4,4	4,7	4,8	4,4	4,4
Ania (x_3)	4,9	4,9	4,6	4,7	4,3
Tomek (x_4)	4,5	4,8	4,9	5,0	4,5
Jacek (x_5)	5,0	4,6	4,7	4,4	5,0
Michał (x_6)	4,9	4,5	5,0	4,5	4,4

Podstawiając średnią ocen studentów z przedmiotów ścisłych do wzoru (4.349), otrzymujemy stopnie przynależności do zbioru rozmytego NS. Analogicznie, podstawiając średnią ocen studentów z języków obcych do wzoru (4.350) otrzymujemy stopnie przynależności do zbioru rozmytego NJ.

Tabela 4.16. Wartości stopni przynależności do zbiorów rozmytych NS i NJ

Student	Elektronika	Informatyka	Matematyka	Angielski	Niemiecki
Kasia (x_1)	1	1	0,8	0,25	1
Małgosia (x_2)	0,2	0,8	1	0,5	0,5
Ania (x_3)	1	1	0,6	1	0,25
Tomek (x_4)	0,4	1	1	1	0,75
Jacek (x_5)	1	0,6	0,8	0,5	1
Michał (x_6)	1	0,4	1	0,75	0,5

Przykład 3

Kolejnym krokiem jest stworzenie zbiorów rozmytych korespondujących z danymi zawartymi w tabeli 4.16.

$$\text{„Najlepszy z elektroniki”} = G_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{0,2}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0,4}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6},$$

$$\text{„Najlepszy z informatyki”} = G_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{0,8}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0,6}{x_5} + \frac{0,4}{x_6},$$

$$\text{„Najlepszy z matematyki”} = G_3 = \frac{0,8}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0,6}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0,8}{x_5} + \frac{1}{x_6},$$

$$\text{„Doskonały z angielskiego”} = G_4 = \frac{0,25}{x_1} + \frac{0,5}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0,5}{x_5} + \frac{0,75}{x_6},$$

$$\text{„Doskonały z niemieckiego”} = G_5 = \frac{1}{x_1} + \frac{0,5}{x_2} + \frac{0,25}{x_3} + \frac{0,75}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0,5}{x_6}.$$

Podstawiając dane do wzoru (4.346), otrzymujemy

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap G_5.$$

Decyzja rozmyta typu minimum jest postaci

$$D = \frac{0,25}{x_1} + \frac{0,2}{x_2} + \frac{0,25}{x_3} + \frac{0,4}{x_4} + \frac{0,5}{x_5} + \frac{0,4}{x_6}.$$

Student x_5 charakteryzuje się największym stopniem przynależności, a zatem on pojedzie na letnie praktyki.

Wybór uczelni

Rozważamy studia na jednej z czterech uczelni – $X_{op} = \{U1, U2, U3, U4\}$

Nasz cel: uczenie się w renomowanej uczelni. Miarą renomy jest miejsce w rankingu szkół wyższych. Przyjmijmy:

$$G = \frac{0,75}{U1} + \frac{1}{U2} + \frac{0,25}{U3} + \frac{0,5}{U4}$$

Jednocześnie chcemy, aby spełnione były pewne warunki:

„niezbyt duża odległość od domu”:

$$C_1 = \frac{0,8}{U1} + \frac{0,9}{U2} + \frac{0,4}{U3} + \frac{0,5}{U4}$$

„bogaty program wymiany międzynarodowej”:

$$C_2 = \frac{0,2}{U1} + \frac{0,2}{U2} + \frac{0,9}{U3} + \frac{0,6}{U4}$$

„dobre zaplecze techniczne uczelni”:

$$C_3 = \frac{0,5}{U1} + \frac{0,3}{U2} + \frac{0,6}{U3} + \frac{0,7}{U4}$$

„duże możliwości znalezienia pracy”:

$$C_4 = \frac{0,6}{U1} + \frac{0,5}{U2} + \frac{0,7}{U3} + \frac{0,7}{U4}$$

Przykład 4

Wyznaczając $\mu_D(x)$ za pomocą min otrzymujemy następującą decyzję rozmytą:

$$D = G \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \frac{0,2}{U1} + \frac{0,2}{U2} + \frac{0,25}{U3} + \frac{0,5}{U4}$$

Teraz przyjmijmy, że t -norma ma postać iloczynową $\mu_D(x) = \mu_G(x) \cdot \mu_{C1}(x) \cdot \mu_{C2}(x) \cdot \mu_{C3}(x) \cdot \mu_{C4}(x)$:

$$D = \frac{0,036}{U1} + \frac{0,027}{U2} + \frac{0,0378}{U3} + \frac{0,0735}{U4}$$

W obu przypadkach największy stopień przynależności wskazuje uczelnię $U4$.

Ustalenie ceny produktu

Zadaniem ekspertów jest ustalenie ceny nowego produktu.

Opcją jest cena produktu $X_{op} = [20, 60]$.

Ustalono trzy cele:

- „produkt powinien mieć niską cenę” — zbiór G_1
- „produkt powinien mieć cenę bliska konkurencyjnej” — zbiór G_2
- „produkt powinien mieć cenę bliska podwójnej cenie wytworzenia” — zbiór G_3

Cena konkurencyjna wynosi 35 zł, a podwójny koszt wytworzenia wynosi 40 zł. Zbiór opcji mieści się w przedziale $X_{op} = [20, 60]$.

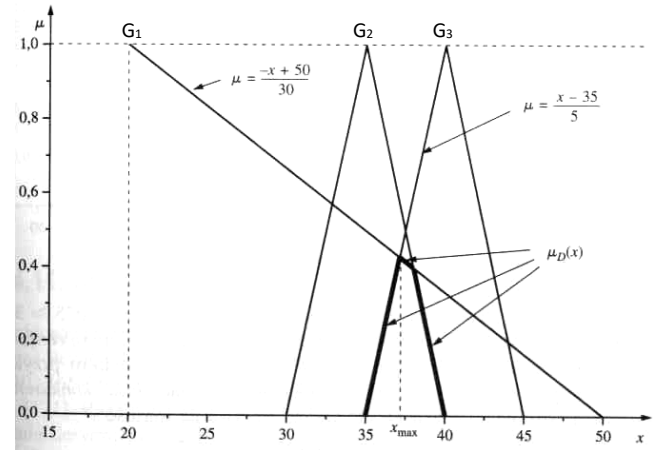
Przykład 5

Funkcje przynależności:

$$\mu_{G_1}(x) = \begin{cases} \frac{-x + 50}{30} & \text{dla } 20 \leq x \leq 50, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$$

$$\mu_{G_2}(x) = \begin{cases} \frac{x - 30}{5} & \text{dla } 30 \leq x \leq 35, \\ \frac{-x + 40}{5} & \text{dla } 35 \leq x \leq 40, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$$

$$\mu_{G_3}(x) = \begin{cases} \frac{x - 35}{5} & \text{dla } 35 \leq x \leq 40, \\ \frac{-x + 45}{5} & \text{dla } 40 \leq x \leq 45, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$



Rozmyta decyzja D typu min jest postaci:

$$\mu_D(x) = \min(\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x), \mu_{G_3}(x))$$

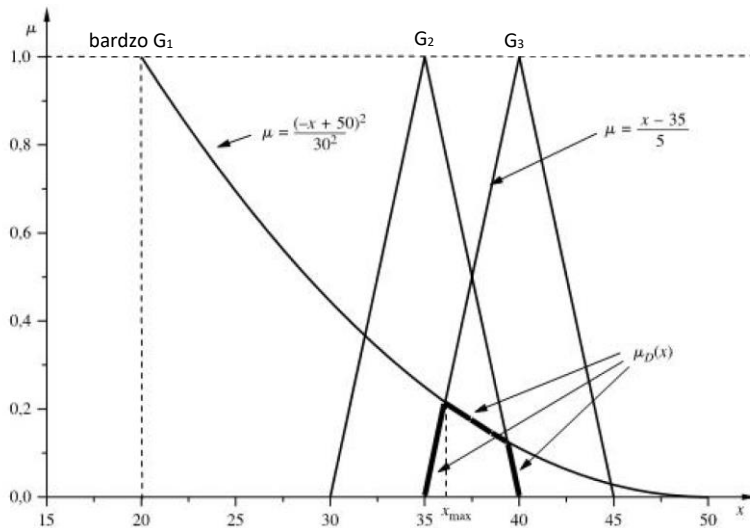
Maksymalna wartość w zbiorze D wynosi $x^* = 37,14$ zł.

Przykład 5

Modyfikujemy wymaganie „produkt powinien mieć niską cenę”, na „produkt powinien mieć **bardzo** niską cenę”.

Funkcja przynależności „bardzo G_1 ” ma postać

$$\mu_{\text{bardzo } G_1}(x) = (\mu_{G_1}(x))^2 = \begin{cases} \left(\frac{-x + 50}{30}\right)^2 & \text{dla } 20 \leq x \leq 50, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$



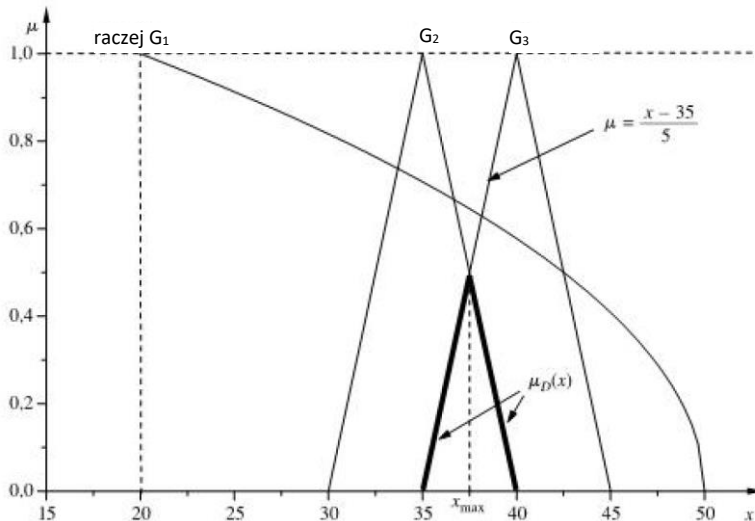
Maksymalna wartość w zbiorze D wynosi
 $x^* = 36,075$ zł.

Przykład 5

Modyfikujemy wymaganie „produkt powinien mieć niską cenę”, na „produkt powinien mieć **raczej** niską cenę”.

Funkcja przynależności „raczej G_1 ” ma postać

$$\mu_{\text{raczej } G_1}(x) = (\mu_{G_1}(x))^{1/2} \begin{cases} \left(\frac{-x + 50}{30}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{dla } 20 \leq x \leq 50, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$



Maksymalna wartość w zbiorze D wynosi
 $x^* = 37,50$ zł.