SZTUCZNA INTELIGENCJA

WNIOSKOWANIE W LOGICE ROZMYTEJ

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości" w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Wnioskowanie w logice dwuwartościowej

W logice tradycyjnej (dwuwartościowej, boolowskiej) prawdziwość pewnych zdań jest wnioskowana na podstawie prawdziwości innych zdań.

Przez regułę wnioskowania rozumiemy sposób wyprowadzania ze zdań prawdziwych, zwanych przesłankami, zdań prawdziwych, zwanych wnioskami. Regułę wnioskowania modus ponens określa następujący schemat wnioskowania:

Przesłanka 1 (fakt)	p
Przesłanka 2 (reguła, implikacja)	$p \to q$
Wniosek	q

p i q oznaczają zdania prawdziwe; p jest poprzednikiem, a q następnikiem implikacji.

Regułę tę odczytujemy: Jeżeli poprzednik prawdziwej implikacji jest prawdziwy, to następnik jest również prawdziwy.

Np. Jeśli prawdą jest p – "Jan jest kierowcą" i prawdą jest $p \to q$ – "JEŻELI Z jest kierowcą, TO Z ma prawo jazdy", to prawdą jest q – "Jan ma prawo jazdy".

WNIOSKOWANIE W LOGICE ROZMYTEJ

W logice klasycznej zdanie p postaci "$x \in A$", gdzie A jest klasycznym zbiorem, może przyjmować dwie wartości logiczne: prawdę lub fałsz. W logice rozmytej zdanie to może przyjmować różne stopnie prawdy μ (stopnie przynależności elementu x do zbioru A).

W logice rozmytej regułę modus ponens odczytujemy: Jeżeli poprzednik implikacji jest prawdziwy w stopniu μ_A i ta implikacja jest prawdziwa w stopniu $\mu_{A \to B}$, to następnik jest prawdziwy w stopniu μ_B.

Uogólniona reguła modus ponens:

Przesłanka 1 (fakt) Przesłanka 2 (reguła, implikacja)	x jest A' x jest $A \to y$ jest B
Wniosek	y jest B'

gdzie: A, $A' \subseteq X$ i B, $B' \subseteq Y$ są zbiorami rozmytymi, x i y są zmiennymi lingwistycznymi.

Zbiory A i A' oraz B i B' są do siebie podobne.

Np. Jeśli zdanie "Jan jest bardzo bystry" jest prawdą w stopniu μ_A i reguła "JEŻELI Z jest bystry, TO oceny Z są dobre" jest prawdziwa w stopniu $\mu_{A\to B}$, to zdanie "Oceny Jana są bardzo dobre" jest prawdziwe w stopniu μ_B.

x – Jan, Z; y – oceny Jana, oceny Z; A – bystry; A' – bardzo bystry; B – dobre; B' – bardzo dobre

Wynikowy zbiór rozmyty B' wynika ze złożenia zbioru A' i relacji rozmytej $A \to B$:

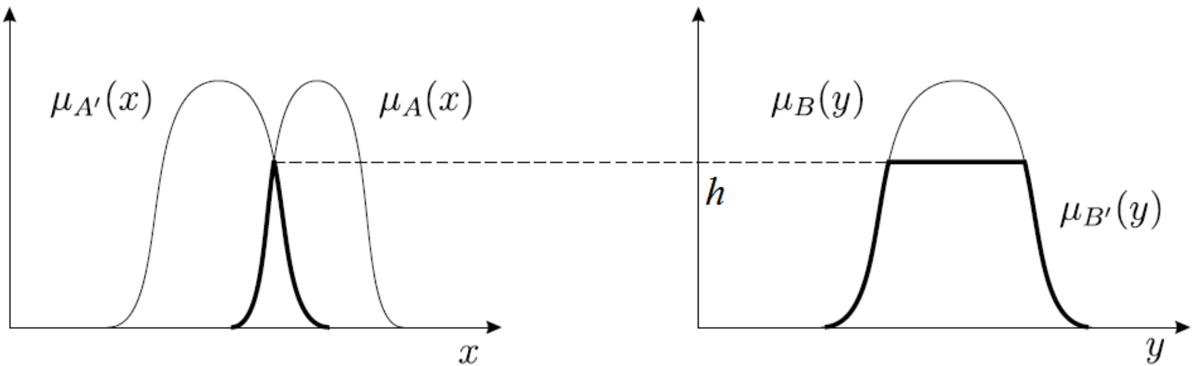
$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x\in X}\{t[\mu_{A'}(x), \mu_{A\to B}(x,y)]\}$$

Relacja rozmyta $A \to B$ może być zdefiniowana na wiele sposobów. Przyjmijmy definicję Mamdaniego: $\mu_{A\to B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$. Stosując operacje min jako t-normę powyższy wzór zapiszemy:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x\in X}\{\min[\mu_{A'}(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(y))]\} = \min\{\sup_{x\in X}\min[\mu_{A'}(x), \mu_A(x)], \mu_B(y)\}$$

Metodę wyznaczania $\mu_{B'}(y)$ możemy zapisać w krokach:

1. Przyjmujemy pewne funkcje przynależności $\mu_{A'}(x), \mu_A(x)\ i\ \mu_B(y)$.
2. Znajdujemy przecięcie $\min[\mu_{A'}(x), \mu_A(x)]$.
3. Znajdujemy największą wartość funkcji przynależności tego przecięcia
   h= $\sup_{x \in X} \min[\mu_{A'}(x), \mu_A(x)]$.
4. Znajdujemy przecięcie stałej *h* z $\mu_B(y)$, które przyjmujemy jako $\mu_{B'}(y)$.



WNIOSKOWANIE W LOGICE ROZMYTEJ – UWAGI

- Zbiór *A'* reprezentuje aktualną/zaobserwowaną wartość zmiennej wejściowej $\bar{x}$. Jeśli zmienna ta jest dokładna, jako $\mu_{A'}(x)$ stosujemy tzw. singleton:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x = \bar{x} \\ 0, & \text{jeżeli } x \neq \bar{x} \end{cases}$$

  Jeśli chcemy uwzględnić niepewność pomiaru zmienną $\bar{x}$ opisujemy pewną funkcją przynależności, jak na rysunku powyżej.

- Jako *t*-normę we wzorach powyżej zamiast min możemy zastosować inne rozwiązania.

- Jeśli zmienna wejściowa *x* jest wektorem **x** = [x_1, x_2, …, x_n] otrzymamy:

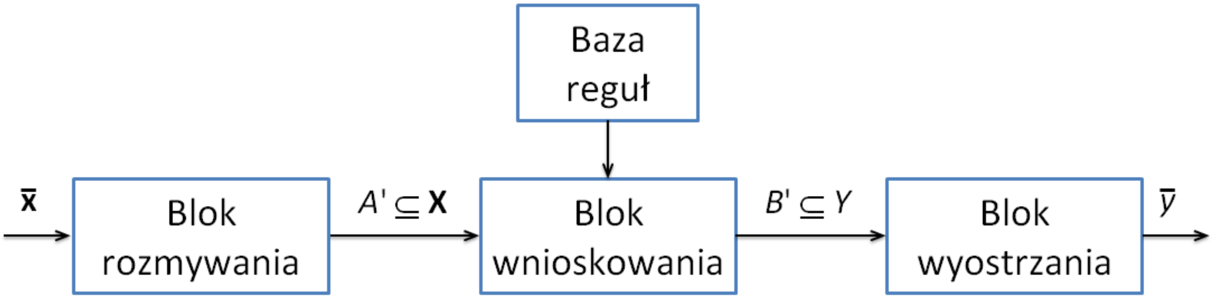
$$\mu_{B'}(y) = \min\{\sup_{x_1 \in X} \min[\mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_1}(x_1)], \ldots, \sup_{x_n \in X} \min[\mu_{A_n'}(x_n), \mu_{A_n}(x_n)], \mu_B(y)\}$$

  Tzn. $\mu_{B'}(y)$ powstaje w wyniku przecięcia $\mu_B(y)$ z najmniejszą spośród wartości *h* wyznaczanych dla każdej współrzędnej **x**.

Rozmyte systemy wnioskujące (RSW) znajdują zastosowanie do modelowania złożonych zjawisk, których modele matematyczne są nieznane lub gdy chcemy uwzględnić informacje nieprecyzyjne lub wieloznaczne. Poniżej opisano tzw. system Mamdaniego.

W RSW wiedza jest reprezentowana w postaci symbolicznej – rozmytych reguł decyzyjnych.

Zastosowanie – klasyfikacja, regresja, sterowniki.

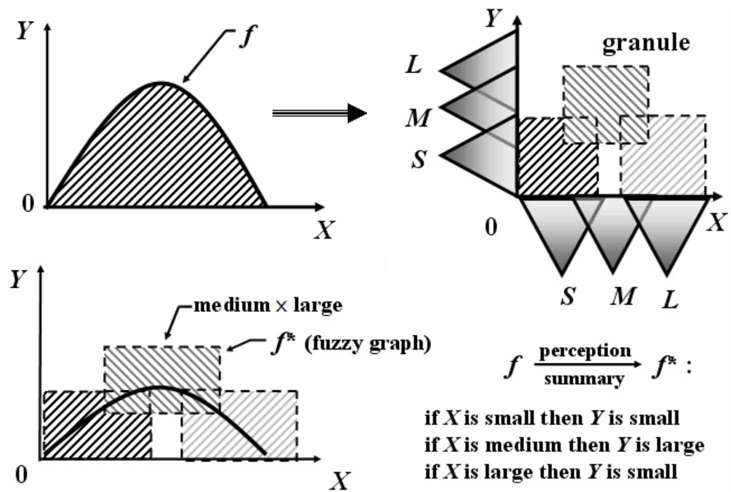


Baza reguł zwana modelem lingwistycznym, stanowi zbiór N reguł rozmytych R_k postaci:

$$R_k\text{: JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k \text{ TO } y \text{ jest } B^k$$

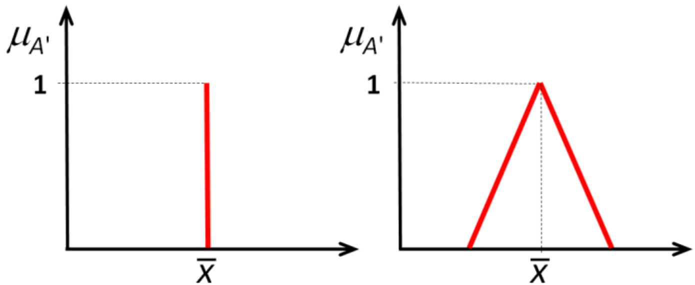
Reguła wyraża rozmytą implikację $A^k \to B^k$.

- Reguły ustalane są przez ekspertów lub tworzone są w procesie uczenia (sieci neuronowo-rozmyte)
- Każda reguła wyraża pewien związek pomiędzy **x** i y i ma charakter lokalny
- Baza reguł jako całość powinna modelować całe zjawisko (globalnie)
- Większa liczba reguł zapewnia dokładniejsze modelowanie



Wartości zmiennych wejściowych $\bar{x}_i$ są rozmywane, tzn. wartości rzeczywiste przekształcane są na zbiór rozmyty A_i'. Pozwala to uwzględniać niepewność co do wartości zmiennej wejściowej.

Jeśli wartość zmiennej jest dokładna stosujemy singleton.



BLOK WNIOSKOWANIA

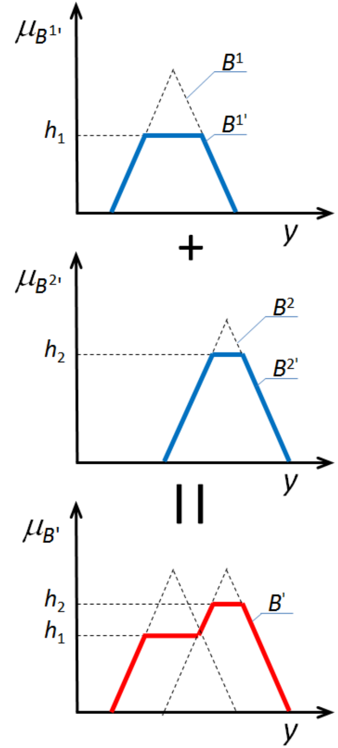
- Wejściem bloku wnioskowania jest zbiór rozmyty
  A' = $A_1' \times A_2' \times \ldots \times A_n'$.

- Na wyjściu *k*-tej reguły otrzymujemy zbiór rozmyty B^{k}'.

- Wynikowy zbiór rozmyty zbioru reguł *B*' powstaje poprzez zsumowanie (agregację) zbiorów rozmytych B^{k}'. Funkcja przynależności tego zbioru:

$$\mu_{B'}(y) = \max[\mu_{B^{1\prime}}(y), \mu_{B^{2\prime}}(y), \ldots, \mu_{B^{N\prime}}(y)]$$

  Zamiast max możemy użyć innej postaci *s*-normy.



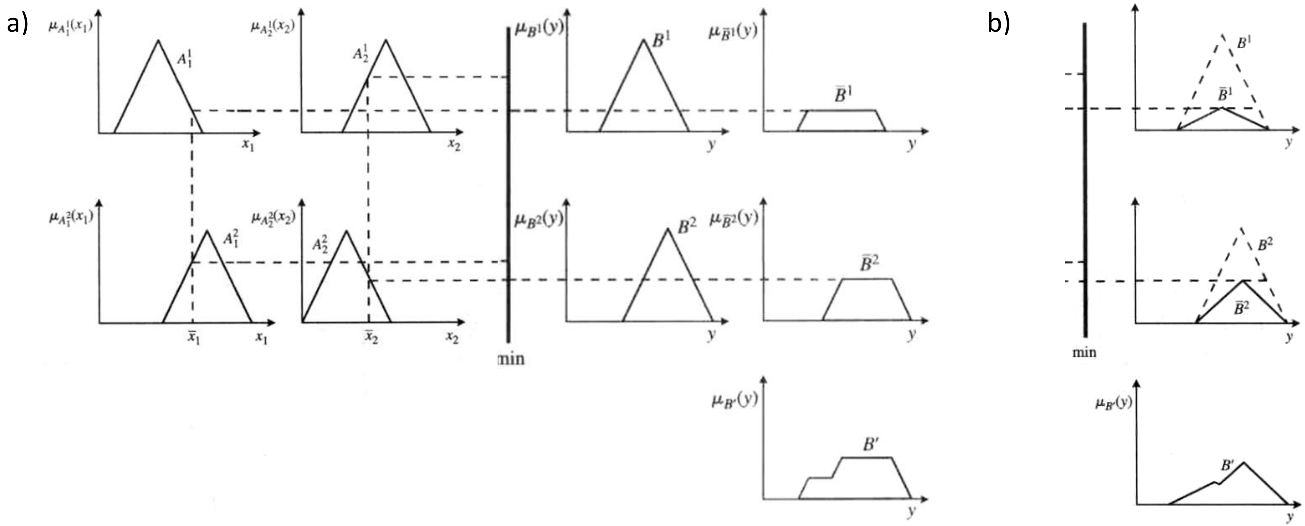
BLOK WNIOSKOWANIA – PRZYKŁAD

Dana jest baza reguł:

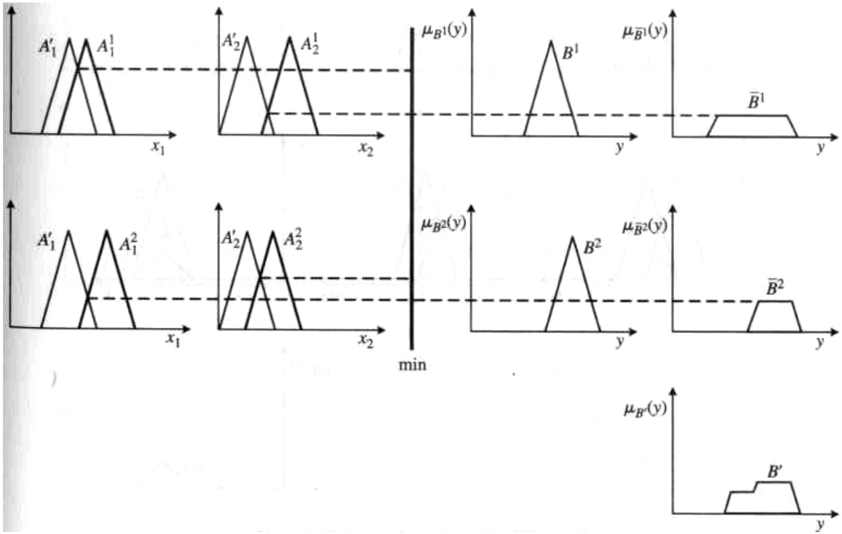
R_1: JEŻELI x_1 jest A_1^1 I x_2 jest A_2^1 TO y jest B^1

R_2: JEŻELI x_1 jest A_1^2 I x_2 jest A_2^2 TO y jest B^2

Na wejście systemu podano przykład: $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T$. Dla przyjętych funkcji przynależności zbiorów A_1^1, A_2^1, A_1^2, A_2^2, B^1 i B^2 wyznacz zbiór B'. Jako operatora przecięcia $\mu_B(y)$ z h_1 i h_2 zastosuj (a) min, (b) iloczyn. Przy zastosowaniu rozmywania typu singleton otrzymamy:

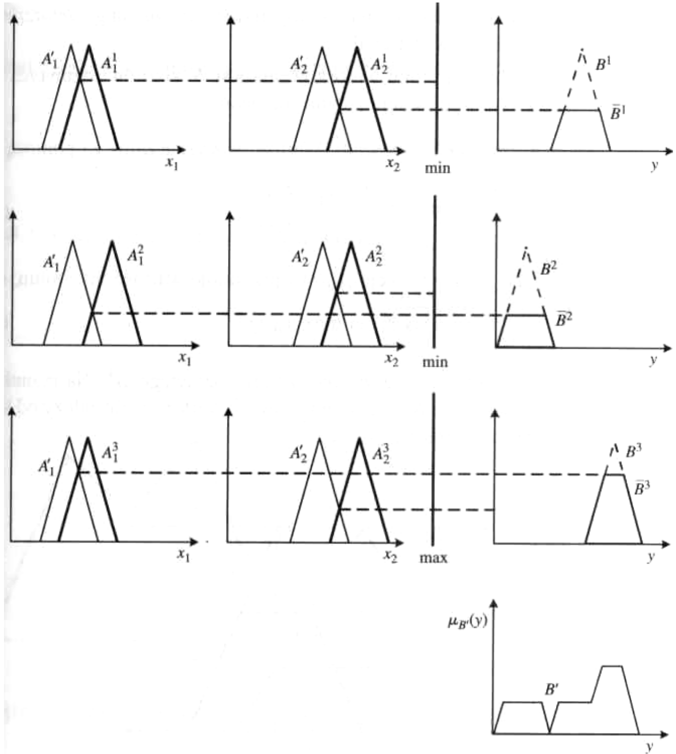


Analogiczny przykład z rozmyciem $\bar{\mathbf{x}}$ za pomocą trójkątnych funkcji przynależności.



Przykład ze spójnikiem LUB w trzeciej regule.

R_1: JEŻELI x_1 jest A_1^1 I x_2 jest A_2^1 TO y jest B^1
R_2: JEŻELI x_1 jest A_1^2 I x_2 jest A_2^2 TO y jest B^2
R_3: JEŻELI x_1 jest A_1^3 LUB x_2 jest A_2^3 TO y jest B^2

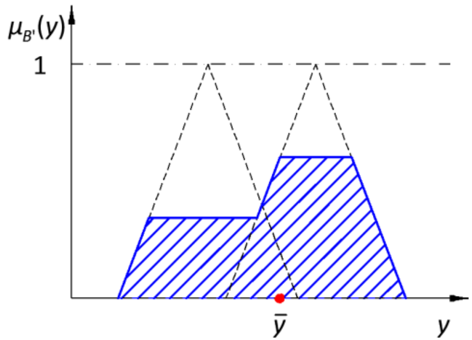


Wejście – zbiór rozmyty *B*', wyjście – wartość ostra $\bar{y}$.

Metody wyostrzania:

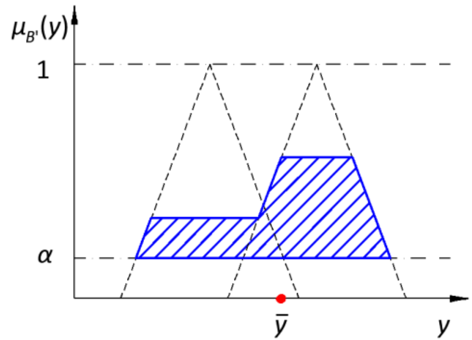
- Metoda środka obszaru – środek ciężkości figury geometrycznej opisanej funkcją przynależności $\mu_{B'}(y)$.

$$\bar{y} = \frac{\int_Y y\mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \mu_{B'}(y)dy}$$



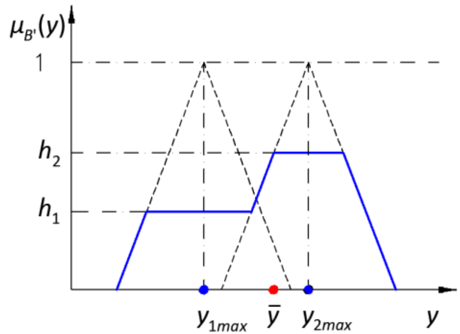
- Metoda środka obszaru z wartością progową – środek ciężkości figury geometrycznej opisanej funkcją przynależności $\mu_{B'}(y)$ leżącą powyżej wartości progowej α:

$$\bar{y} = \frac{\int_{Y_\alpha} y\mu_{B'}(y)dy}{\int_{Y_\alpha} \mu_{B'}(y)dy}, \quad Y_\alpha = \{y \in Y : \mu_{B'}(y) \geq \alpha\}$$



- Metoda wysokości – suma argumentów poszczególnych składowych funkcji przynależności, przy których występują ich wartości szczytowe ważonych ich "poziomami odcięcia":

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N} h_k y_{k\max}}{\sum_{k=1}^{N} h_k}$$



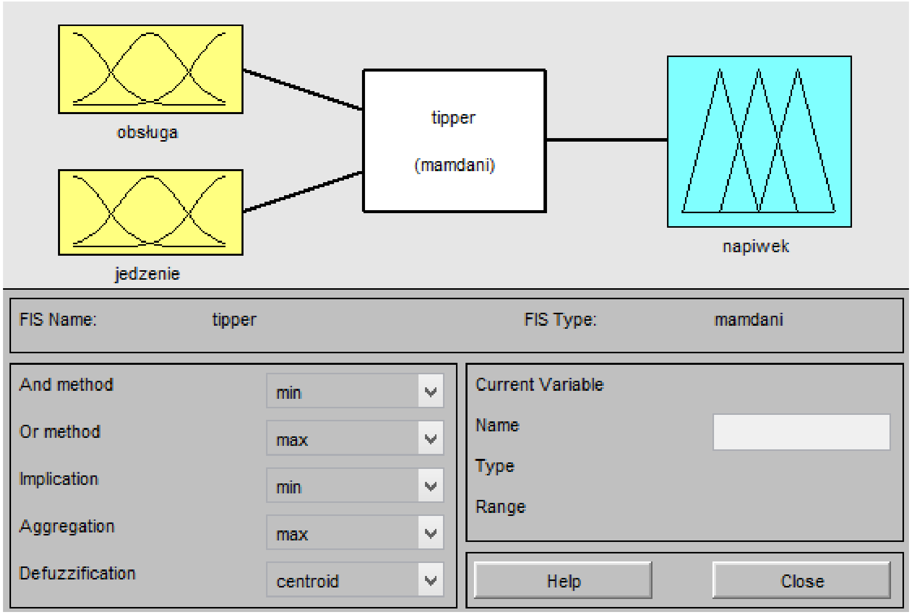
ROZMYTY SYSTEM WNIOSKUJĄCY – PRZYKŁAD

Należy ustalić wielkość napiwku w zależności od jakości obsługi i jakości jedzenia.

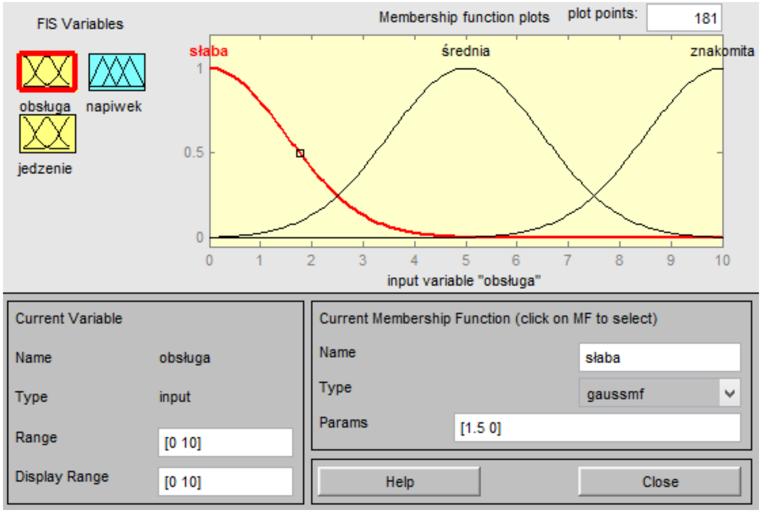
1. Ustalamy, że zmienne wejściowe *obsługa* i *jedzenie* przyjmują wartości od 0 do 10 (nasze oceny). Zmienna wyjściowa *napiwek* przyjmuje wartości od 0 do 30 (procent od wysokości rachunku).

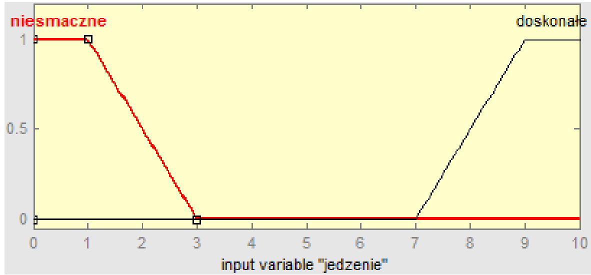
2. Zmienne *obsługa* i *jedzenie* rozmywamy za pomocą singletonu.

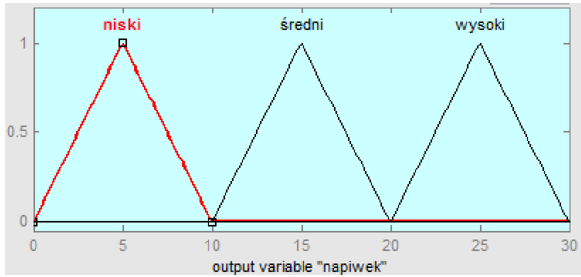
3. Ustalamy sposoby realizacji funkcji: I, LUB, implikacja, agregacja, wyostrzanie.



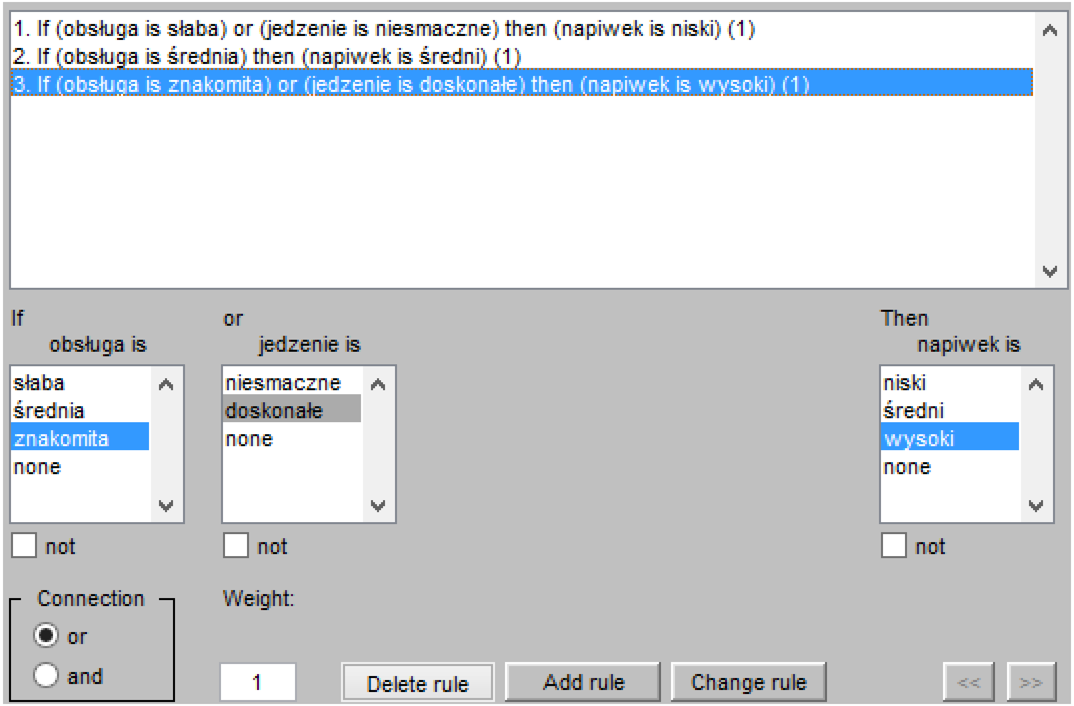
4. Definiujemy zbiory rozmyte dla każdej zmiennej.



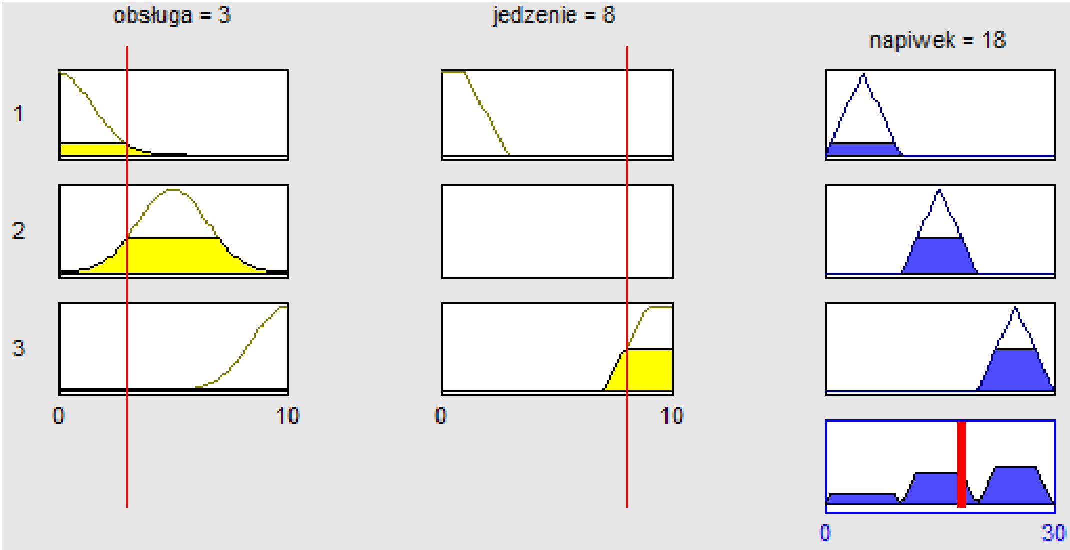




5. Wprowadzamy reguły.



6. Zadajemy konkretne wartości zmiennych wejściowych i odczytujemy rezultat.



7. Funkcja zamodelowana przez system.