

SZTUCZNA INTELIGENCJA

PROBLEMY OPTYMALIZACYJNE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Projekt finansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” w latach 2019 - 2022 nr projektu 020/RID/2018/19 kwota finansowania 12 000 000 PLN

Optymalizacja – poszukiwanie najlepszego rozwiązania z punktu widzenia przyjętego kryterium*

Zadanie optymalizacji (minimalizacji):

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$$

gdzie:

\mathbf{x}, \mathbf{x}^* – wektor rozwiązania i wektor optymalny,

$f(\cdot)$ – funkcja celu,

D – dziedzina.

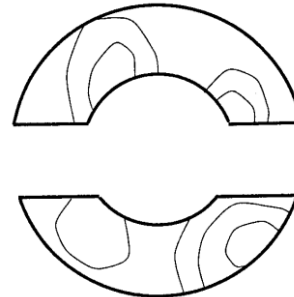
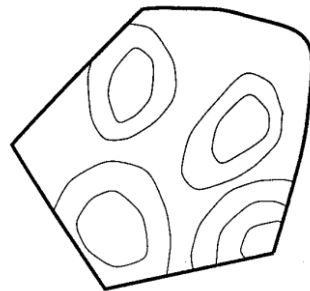
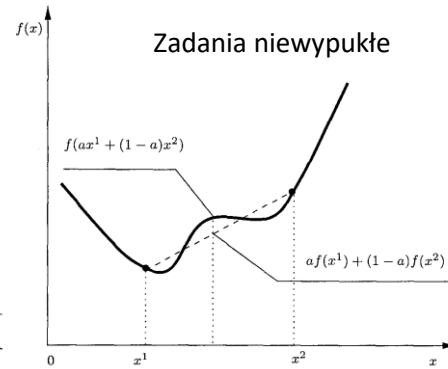
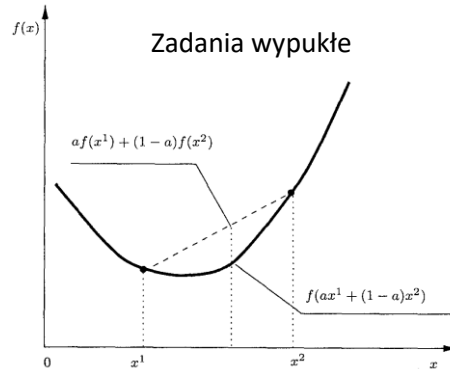
Rodzaje zadań optymalizacji:

- ciągłe – wartości zmiennych należą do R^n ,
- dyskretne lub kombinatoryczne – wartości zmiennych należą do zbioru przeliczalnego,
- mieszane,
- z ograniczeniami lub bez.

* Wykład opracowano na podstawie Arabas J.: *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*. WNT, Warszawa 2001.

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

Zadania wypukłe – zbiór dopuszczalny i funkcja celu są wypukłe (istnieje dokładnie jedno minimum)



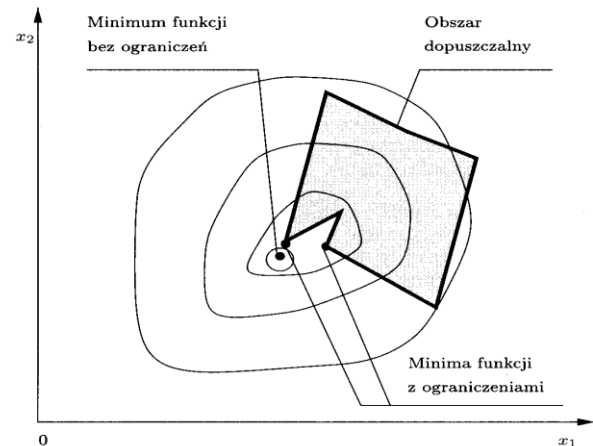
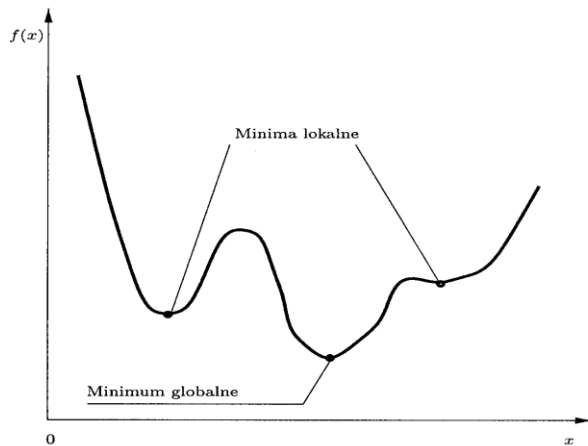
WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

Zadania liniowe – zbiór dopuszczalny i funkcja celu są liniowe

Różniczkowalność funkcji celu – może być wykorzystana w metodach optymalizacji (zerowy gradient)

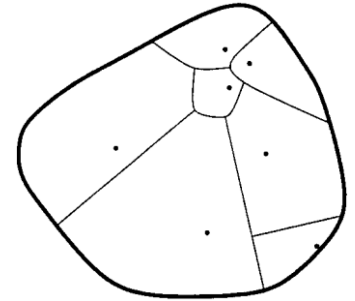
Właściwość dekompozycji – funkcja celu jest złożeniem wielu funkcji, które mogą być optymalizowane oddzielnie

Wielomodalność funkcji celu – funkcja celu posiada wiele minimów lokalnych



WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

Obszary/baseny przyciągania minimów lokalnych – algorytm optymalizacji lokalnej uruchomiony z dowolnego punktu z obszaru przyciągania minimum lokalnego \mathbf{x}_o osiądzie/zbiegnie się do punktu \mathbf{x}_o



Ograniczenia funkcji celu:

- nierównościowe: $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$
- równościowe: $h_i(\mathbf{x}) = 0$
- kostkowe: $l_i \leq x_i \leq u_i$
- liniowe: $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b \leq 0$, $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b \geq 0$ lub $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b = 0$

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

Znaczenie liczby wymiarów problemu

Wraz ze wzrostem liczby wymiarów n wektora x zwiększa się stopień komplikacji problemu.

Przestrzeń rozwiązań w zadaniach kombinatorycznych, w których zmienne przyjmują wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ składa się z 2^n punktów.

Np. dla $n = 3$ mamy: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

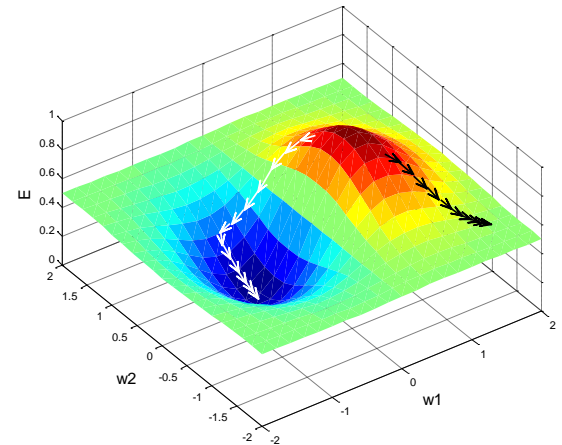
W zadaniach dyskretnych dodanie k -wartościowej zmiennej skutkuje k -krotnym zwiększeniem przestrzeni rozwiązań.

Zadania ciągłe

- metoda simpleks dla zadań liniowych,
- metody bezgradientowe – kierunki poszukiwań są równoległe do osi współrzędnych lub wynikają z historii poszukiwań,
- metody gradientowe – kierunek poszukiwań określa minus gradient funkcji celu

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

- metody newtonowskie – oprócz gradientu korzystają z dodatkowych informacji o pochodnych cząstkowych (hesjan)
- metoda sympleksu nieliniowego (metoda Nelder–Meada)



Zadania dyskretne

- metody dokładne – przegląd zupełny,
- metody enumeracyjne – programowanie dynamiczne, metoda podziału i ograniczeń,
- metody losowe – Monte Carlo, metoda błędzenia przypadkowego,
- metody heurystyczne – algorytm genetyczny, symulowane wyżarzanie, metody rojowe, algorytmy mrówkowe, metoda tabu, ...

Heurystyka to reguły specyficzne dla danego problemu, które mogą pomóc w zgadywaniu jak najlepszego rozwiązania. Reguły te nie gwarantują znalezienia optimum, ale dają możliwość sukcesywnego poprawiania rozwiązania.

Metaheurystyka to sposób generowania reguł dla algorytmów heurystycznych.

Zadania optymalizacji globalnej – zadania, w których funkcja celu ma więcej niż jedno minimum.
Metody optymalizacji globalnej:

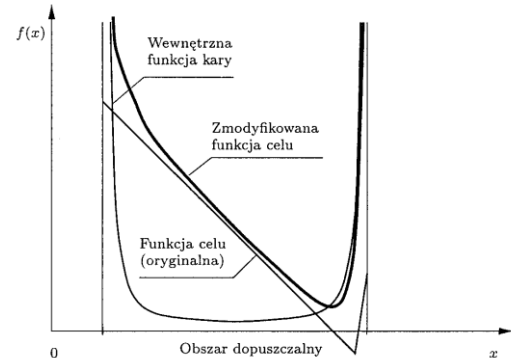
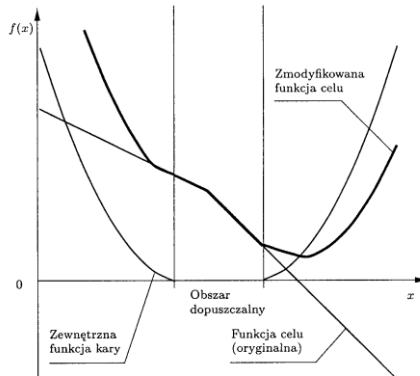
- metody multistartu – uruchamianie algorytmu lokalnego z różnych punktów startowych,
- metody grupowania – naprzemienne kroki optymalizacji lokalnej i grupowania punktów leżących w otoczeniu tych samych minimów lokalnych. Identyfikacja tych grup pozwala usunąć część punktów,
- metody pokryć siatką – identyfikacja oczek o wysokich wartościach funkcji celu i ich zagęszczanie,
- metody heurystyczne i losowe – algorytmy ewolucyjne, symulowane wyżarzanie, ...

Metody optymalizacji globalnej powinny być odporne na utykanie w minimach lokalnych

METODY ELIMINACJI OGRANICZEŃ FUNKCJI CELU

Ograniczenia funkcji celu (z wyjątkiem kostkowych) mogą bardzo utrudniać proces przeszukiwania. Metody eliminacji ograniczeń:

- metody transformacji zmiennych i ograniczeń – zadanie dla nowych zmiennych lub w obszarze zmienionych ograniczeń jest łatwiejsze do rozwiązania,
- metody z funkcją kary – do pierwotnej funkcji celu dodaje się składniki kar związanych z przekroczeniem ograniczeń,



- oprócz ww. w AE stosuje się: karę śmierci, metody naprawy, reprezentacje i operatory zapobiegające naruszeniu ograniczeń, dekodery.

OPTIMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA

Szukamy rozwiązania optymalizującego jednocześnie kilka kryteriów, często ze sobą niezgodnych lub sprzecznych.

Kompromisem są rozwiązania optymalne w sensie Pareto, tzn. **niezdominowane**.

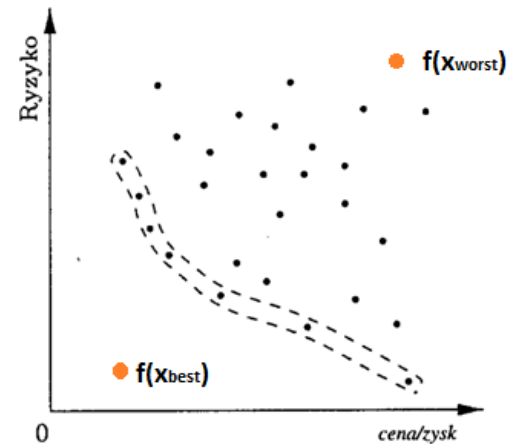
Rozwiązanie \mathbf{x} jest zdominowane, jeśli istnieje rozwiązanie \mathbf{y} , nie gorsze od \mathbf{x} względem wszystkich kryteriów:

$$\forall i = 1, \dots, m \quad f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{y})$$

Metody optymalizacji wielokryterialnej:

- wazone sumowanie kryteriów: $\min \sum_{i=1}^m w_i f_i(\mathbf{x})$
- metoda punktu idealnego: $\min \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{best})\|$
- metoda punktu najgorszych oczekiwań:

$$\max \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{worst})\|$$



Algorytmy ewolucyjne (*evolutionary algorithms*) – metody przeszukiwania przestrzeni rozwiązań, wykorzystujące zasady ewolucji biologicznej i dziedziczności.

Cechy wspólne AE:

- utrzymują pewną populację osobników – potencjalnych rozwiązań zadania,
- każdy osobnik jest zakodowanym rozwiązaniem zadania (stanem),
- działają w środowisku określonym przez rozwiązywany problem,
- każdy osobnik jest oceniany względem przystosowania do środowiska,
- zawierają proces selekcji osobników,
- zawierają operatory genetyczne modyfikujące osobniki,
- są metodami optymalizacji globalnej,
- proces przeszukiwania jest iteracyjny, równoległy

EWOLUCYJNE METODY OBLICZENIOWE

Do ewolucyjnych metod obliczeniowych zalicza się:

- algorytmy genetyczne (*genetic algorithms*, Holland 1975) – do problemów optymalizacji dyskretnej, kombinatorycznej,
- programowanie ewolucyjne (*evolutionary programming*, Fogel 1966) – do przeszukiwania przestrzeni stanów automatów skończonych,
- programowanie genetyczne (*genetic programming*, Koza 1990) – do przeszukiwania możliwych programów komputerowych rozwiązujących zadania,
- strategie ewolucyjne (*evolution strategies*, Rechenberg, Schwefel 1973) – do problemów optymalizacji numerycznej,
- Inne: ewolucja różnicowa, systemy mrówkowe, inteligencja rojowa, sztuczne systemy immunologiczne, ...