SYSTEMY UCZĄCE SIĘ

WYKŁAD 2. UCZENIE SIĘ INDUKCYJNE

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Częstochowa 2014

WSTĘP

Wiedza pozyskana przez ucznia ma charakter odwzorowania informacji wejściowej za zbiór wartości wyjściowych.

Informacja wejściowa – opisy obiektów pewnej dziedziny

Dziedzina – zbiór obiektów X, których dotyczy wiedza zdobywana przez ucznia (przedmioty, osoby, wydarzenia, sytuacje, procesy, …)

Przykład – obiekt, element dziedziny $x \in X$

Atrybut (cecha, zmienna) – przykłady opisywane są za pomocą atrybutów x_i: $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

Wartości wyjściowe – klasa lub wartość funkcji

Typy atrybutów:

- nominalne – o skończonym zbiorze nieuporządkowanych wartości dyskretnych,

  np. kolor, kształt, marka; relacje >, < są nieokreślone

- porządkowe – o skończonym zbiorze uporządkowanych wartości dyskretnych,

  np. rozmiar (S, M, L, XL), wzrost (niski, średni, wysoki); relacje >, < są określone

- ciągłe – o wartościach ze zbioru liczb rzeczywistych,

  np. temperatura, prędkość, masa

Przykład: punkty na płaszczyźnie.

Dziedzina – $X = \mathbb{R}^2$

Atrybuty – dwie współrzędne kartezjańskie: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Przykład – punkt na płaszczyźnie: $\boldsymbol{x} = [1.23, 2.56]$

Klasa – punkty z pierwszej ćwiartki, punkty z drugiej ćwiartki, …

Przykład: n-elementowe łańcuchy binarne

Dziedzina – $X = \{0, 1\}^n$

Atrybuty – wartości binarne: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$

Przykład – łańcuch binarny: $\boldsymbol{x}$ = [01001010…]

Klasa – łańcuchy z jedną jedynką, łańcuchy z dwiema jedynkami, …

Przykład: figury geometryczne

Dziedzina – kolorowe figury geometryczne

Atrybuty – rozmiar, kolor, kształt

Przykład – $\boldsymbol{x}$ = (duży, niebieski, trójkąt)

Klasa – czworoboki, pięcioboki, trójkąty, …

Przykład: pogoda

Dziedzina – stany pogody

Atrybuty – aura (słoneczna, pochmurna, deszczowa), temperatura (zimna, umiark., ciepła), wilgotność (normalna, duża), wiatr (słaby, silny)

Przykład – $\boldsymbol{x}$ = (słoneczna, zimna, duża, słaby)

Klasa – pogoda ładna, pogoda brzydka

Przykłady trenujące do uczenia się pojęć (przykłady etykietowane): opis obiektu + etykieta klasy

$$\langle \mathbf{x}, d \rangle$$

np. ⟨[1.23, 2.56], 1⟩; ⟨[1001000], 2⟩; ⟨(duży, niebieski, trójkąt), trójkąty⟩; ⟨(słoneczna, zimna, duża, silny), pogoda brzydka⟩

Zadanie ucznia (uczenie z nadzorem) – znalezienie hipotezy (wiedzy), która jest spójna (zgodna) z pojęciem docelowym (klasą) dla przykładów trenujących i która klasyfikuje również inne przykłady z jak najmniejszym błędem.

Hipoteza jest funkcją przypisującą przykładom ich klasy – $h : X \to C$, gdzie X jest dziedziną (zbiorem obiektów), a C jest zbiorem ich klas.

Dla zadania "punkty na płaszczyźnie" hipoteza może mieć postać:

Jeśli znak(x_1) = "+" i znak(x_2) = "+" to $\hat{d}$ = 1 (punkty z pierwszej ćwiartki)

Jeśli znak(x_1) = "–" i znak(x_2) = "+" to $\hat{d}$ = 2 (punkty z drugiej ćwiartki)

Jeśli znak(x_1) = "–" i znak(x_2) = "–" to $\hat{d}$ = 3 (punkty z trzeciej ćwiartki)

Jeśli znak(x_1) = "+" i znak(x_2) = "–" to $\hat{d}$ = 4 (punkty z pierwszej ćwiartki)

Dla zadania "n-elementowe łańcuchy binarne" hipoteza może mieć postać:

$\hat{d} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

Hipoteza uzyskana w wyniku uczenia się pojęć może być stosowana do klasyfikacji innych przykładów z dziedziny. Uczeń na wejściu otrzymuje przykład $\boldsymbol{x}$, a na wyjściu podaje jego klasę $\hat{d}$.

Prezentacja przykładu na wejściu nazywa się zapytaniem, a jego klasyfikacja przez ucznia – odpowiedzią na zapytanie.

Zbiór trenujący – zbiór przykładów etykietowanych $T = \{\langle \mathbf{x}_1, d_1\rangle, \langle \mathbf{x}_2, d_2\rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}_N, d_N\rangle\}$

L.p.	**x**		Klasa
	x_1	x_2	d
1	2.65	1.26	1
2	–34.89	3.56	2
…	…	…	…
N	5.87	–7.94	4

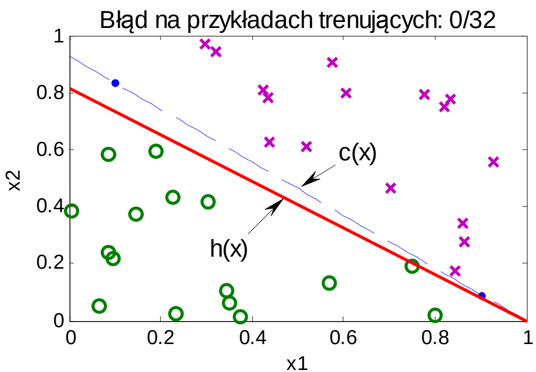
L.p.	**x**				Klasa
	x_1	x_2	x_3	x_4	d
1	słoneczna	zimna	duża	silny	brzydka
2	słoneczna	umiark.	normalna	słaby	ładna
…	…	…	…	…	…
N	deszczowa	zimna	duża	silny	brzydka

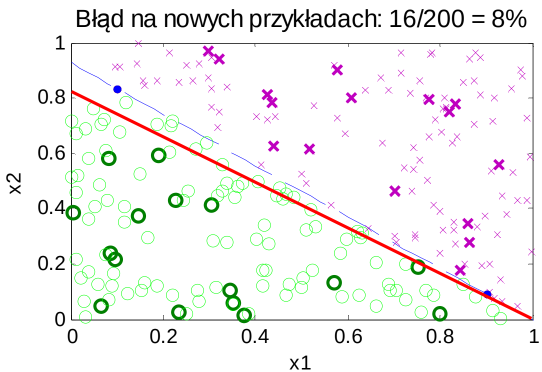
BŁĄD W UCZENIU SIĘ POJĘĆ

Błąd klasyfikacji – stosunek liczby niepoprawnie sklasyfikowanych przykładów do liczby wszystkich przykładów:

$$E(h) = \frac{|\{\mathbf{x} \in P \,|\, h(\mathbf{x}) \neq d)\}|}{|P|}$$

gdzie: |.| – moc zbioru, $P \in X$ – zbiór przykładów, $h(\mathbf{x})$ – klasa przypisana przez ucznia.





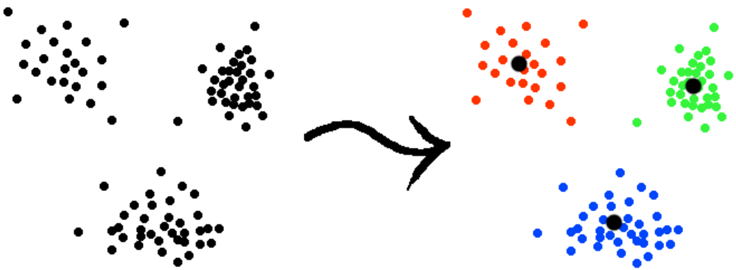
Uczenie bez nadzoru – klasy przykładów są nieznane (przykłady nieetykietowane).

Uczeń grupuje samodzielnie zaobserwowane przykłady w grupy zgodnie z pewnymi kryteriami podobieństwa.

Hipoteza – funkcja odwzorowująca przykłady na zbiór grup – $h : X \rightarrow C_h$, gdzie C_h jest zbiorem grup utworzonym przez ucznia.

Hipoteza określa:

- jak są tworzone grupy
- jak do grup przypisane są przykłady



Odpowiedzią na zapytanie jest wskazanie przez ucznia grupy przykładu prezentowanego na wejściu

Zbiór trenujący – zbiór przykładów nieetykietowanych $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N\}$

UCZENIE SIĘ APROKSYMACJI FUNKCJI

Uczenie się funkcji odwzorowującej przykłady na zbiór liczb rzeczywistych.

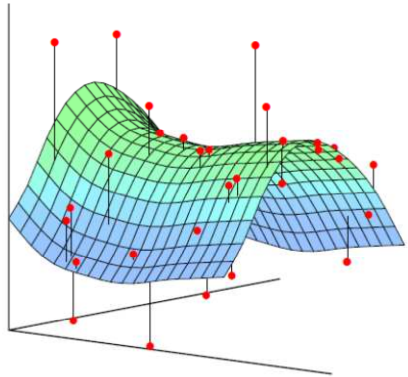
Przykłady trenujące – argument funkcji + wartość funkcji: $\langle \mathbf{x}, y \rangle$, gdzie $y = f(\mathrm{x}) + \varepsilon$, ε – błąd

Zadanie ucznia (uczenie z nadzorem) – znalezienie hipotezy dobrze przybliżającej nieznaną funkcję docelową $f : X \to \mathbb{R}$ dla przykładów trenujących i innych z dziedziny.

Hipoteza – funkcja przekształcająca przykłady w zbiór liczb rzeczywistych – $h : X \to \mathbb{R}$.

Zbiór trenujący – zbiór przykładów etykietowanych $T = \{\langle \mathbf{x}_1, y_1 \rangle, \langle \mathbf{x}_2, y_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}_N, y_N \rangle\}$

L.p.	**x**		y
	x_1	x_2	
1	5.5	6.0	275.375
2	–4.5	–7.0	–261.625
…	…	…	…
N	0.5	8.0	257.125



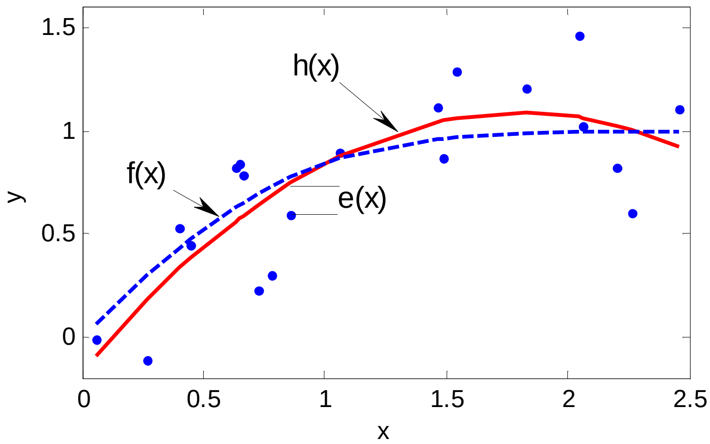
Błędy aproksymacji

Średni błąd względny: $$E(h) = \frac{1}{|P|}\sum_{\mathbf{x}\in P}\frac{|f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})|}{f(\mathbf{x})} = \text{mean}\left(\frac{|e(\mathbf{x})|}{f(\mathbf{x})}\right)$$

Błąd średniokwadratowy (MSE): $$E(h) = \frac{1}{|P|}\sum_{\mathbf{x}\in P}(f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}))^2 = \text{mean}(e^2(\mathbf{x}))$$

gdzie: |.| – moc zbioru, $P \in X$ – zbiór przykładów, y – wartość pożądanej odpowiedzi, $h(\mathbf{x})$ – odpowiedź ucznia.

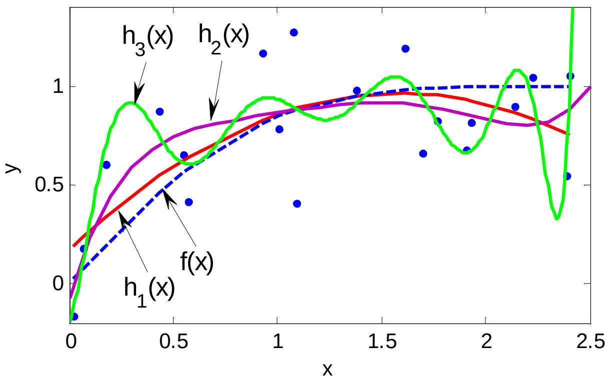
Ponieważ zwykle nie znamy prawdziwej wartości funkcji docelowej $f(\mathbf{x})$, w jej miejsce w powyższych wzorach podstawiamy y ($y = f(\text{x}) + \varepsilon$)

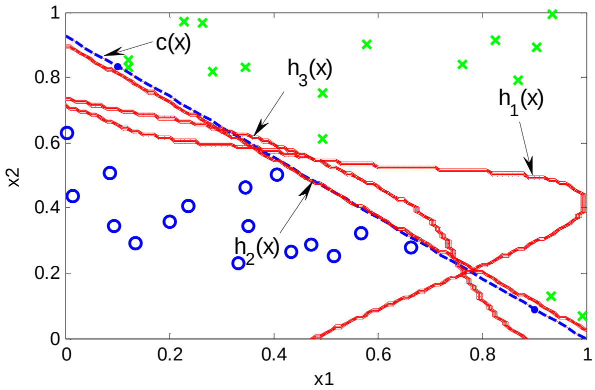


PROBLEM NADMIERNEGO DOPASOWANIA

Generalizacja (uogólnianie) – zdolność SUS do poprawnych odpowiedzi na przykłady spoza zbioru trenującego. Aby osiągnąć najlepszą generalizację złożoność hipotezy powinna odpowiadać złożoności pojęcia/funkcji docelowej.

Hipoteza jest nadmiernie dopasowana do zbioru trenującego (przeuczona), gdy istnieje inna hipoteza o większym błędzie na zbiorze trenującym, ale o mniejszym błędzie generalizacji (na nowych przykładach).





PROBLEM NADMIERNEGO DOPASOWANIA

Zagrożenie przeuczenia – SUS dopasowuje hipotezę do przykładów uczących, często zaszumionych. Charakterystyczne cechy pojęcia/funkcji docelowej pozostają niewykryte.

Przeuczeniu sprzyja:

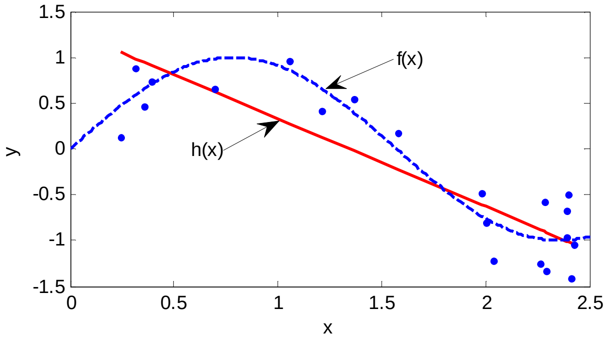
- nadmiernie złożony (elastyczny) model (bogate przestrzenie hipotez)
- deficyt danych

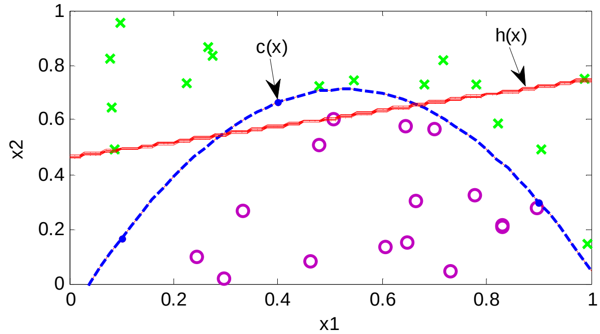
Zapobieganie nadmiernemu dopasowaniu:

- kontrola dopasowania hipotezy na przykładach walidacyjnych
- uwzględnienie złożoności hipotez w kryterium wyboru najlepszej hipotezy (regularyzacja)
- adaptacyjny dobór złożoności hipotezy (struktury modelu)
- komitety modeli
- dodanie składnika losowego do danych uczących
- wzbogacenie zbioru trenującego o nowe przykłady

PROBLEM NIEDOUCZENIA

Złożoność hipotezy jest mniejsza niż złożoność funkcji docelowej.





Zapobieganie niedouczeniu:

- rozbudowanie modelu (wzbogacenie przestrzeni hipotez)
- adaptacyjny dobór złożoności hipotezy (struktury modelu)

Selekcja najlepszej hipotezy

Zbiór przykładów dzielimy na trzy rozłączne podzbiory:

- zbiór trenujący,
- zbiór walidacyjny i
- zbiór testowy.

Przykłady do tych zbiorów wybieramy losowo, np. 50% przykładów do zbioru trenującego, 25% – do zbioru walidacyjnego, 25% – do zbioru testowego.

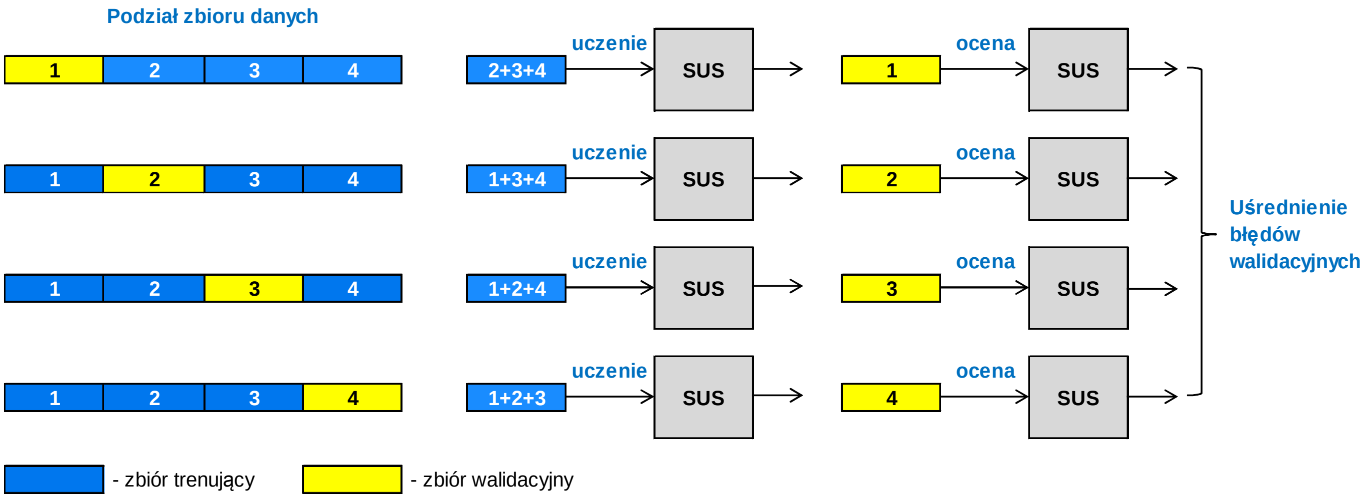
Użycie zbiorów:

- SUS uczy się na zbiorze trenującym.
- Błąd generalizacji hipotezy w trakcie uczenia szacujemy na zbiorze walidacyjnym, różnym od zbioru trenującego.
- Ostateczny błąd generalizacji SUS mierzymy na zbiorze testowym.

Hipoteza o najmniejszym błędzie testowym jest najlepsza.

ESTYMACJA BŁĘDU GENERALIZACJI

Kroswalidacja – procedura uczenia i oceny SUS, w której zbiór przykładów dzieli się losowo na *m* równolicznych, rozłącznych podzbiorów. Następnie kolejno każdy z tych podzbiorów bierze się jako zbiór walidacyjny, a pozostałe razem jako zbiór trenujący, którym uczy się SUS. Błąd generalizacji szacuje się uśredniając błędy walidacyjne obliczane po każdej z *m* sesji uczących.



Postać modelu:

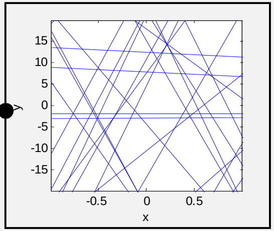
$$g(\mathbf{x}\,|\,\theta)$$

gdzie: $\mathbf{x}$ – wejścia, θ – parametry.

$g(.)$ reprezentuje klasę hipotez H. Konkretne wartości parametrów θ reprezentują konkretną hipotezę $h \in H$.

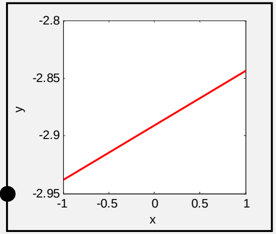
Przykład: model liniowy

Klasa hipotez: $g(\mathbf{x}\,|\,\theta) = ax + b$



$\theta = [a, b]$

Konkretna hipoteza: $g(\mathbf{x}\,|\,[0.0472, -2.8912]) = 0.0472\,x - 2.8912$



Postać modelu ustala projektant na podstawie przewidywanej postaci funkcji docelowej i własnych doświadczeń (obciążenie indukcyjne).

Kryterium oceny modelu:

- błąd generalizacji
- złożoność (liczba parametrów)

Procedura optymalizacji (uczenia) modelu:

Znaleźć wartości parametrów minimalizujące kryterium oceny

$$\theta^* = \arg\min_{\theta} E(\theta \mid X)$$

Metody optymalizacji:

- Analityczne (w zadaniach regresji)
- Gradientowe
- Stochastyczne (algorytmy ewolucyjne i rojowe)
- …