# Sztuczna Inteligencja

## Wykład 13. Problemy optymalizacyjne

Dr hab. inż. Grzegorz Dudek
Wydział Elektryczny
Politechnika Częstochowska

Częstochowa 2014

Optymalizacja – poszukiwanie najlepszego rozwiązania z punktu widzenia przyjętego kryterium*

Zadanie optymalizacji (minimalizacji):

$$\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$$

gdzie:

**x, x*** – wektor rozwiązania i wektor optymalny,
*f*(.) – funkcja celu,
*D* – dziedzina.

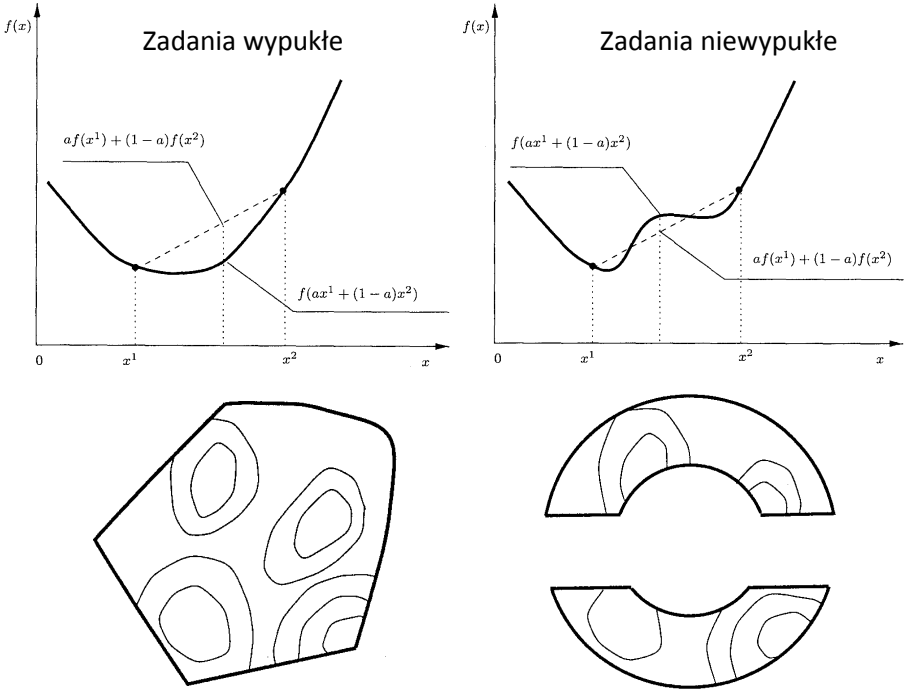
Rodzaje zadań optymalizacji:

- ciągłe – wartości zmiennych należą do $R^n$,
- dyskretne lub kombinatoryczne – wartości zmiennych należą do zbioru przeliczalnego,
- mieszane,
- z ograniczeniami lub bez.

* Wykład opracowano na podstawie Arabas J.: *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych.* WNT, Warszawa 2001.

# WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

Zadania wypukłe – zbiór dopuszczalny i funkcja celu są wypukłe (istnieje dokładnie jedno minimum)



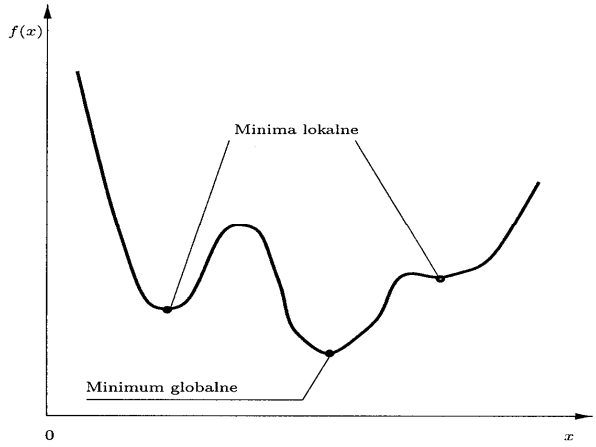
# WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

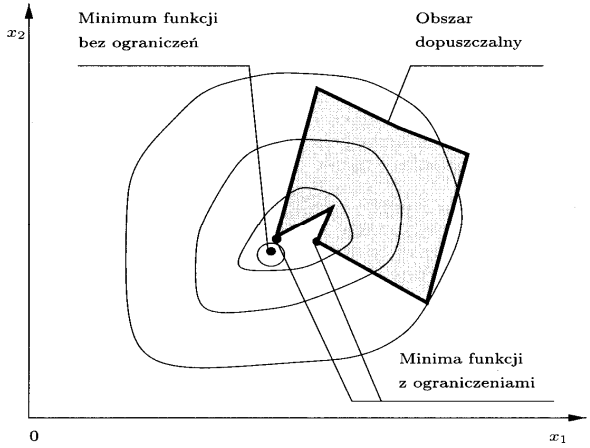
Zadania liniowe – zbiór dopuszczalny i funkcja celu są liniowe

Różniczkowalność funkcji celu – może być wykorzystana w metodach optymalizacji (zerowy gradient)

Właściwość dekompozycji – funkcja celu jest złożeniem wielu funkcji, które mogą być optymalizowane oddzielnie

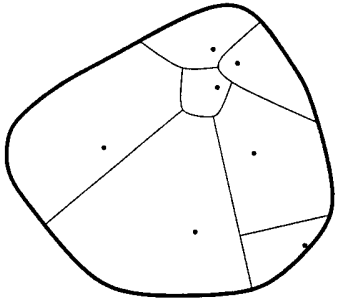
Wielomodalność funkcji celu – funkcja celu posiada wiele minimów lokalnych



# WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CELU I OGRANICZEŃ

Obszary/baseny przyciągania minimów lokalnych – algorytm optymalizacji lokalnej uruchomiony z dowolnego punktu z obszaru przyciągania minimum lokalnego $\mathbf{x}_o$ osiądzie/zbiegnie się do punktu $\mathbf{x}_o$



Ograniczenia funkcji celu:

- nierównościowe: $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$
- równościowe: $h_i(\mathbf{x}) = 0$
- kostkowe: $l_i \leq x_i \leq u_i$
- liniowe: $\mathbf{a}^T\mathbf{x}+b \leq 0$, $\mathbf{a}^T\mathbf{x}+b \geq 0$ lub $\mathbf{a}^T\mathbf{x}+b = 0$

## Znaczenie liczby wymiarów problemu

Wraz ze wzrostem liczby wymiarów $n$ wektora $\mathbf{x}$ zwiększa się stopień komplikacji problemu.

Przestrzeń rozwiązań w zadaniach kombinatoryczych, w których zmienne przyjmują wartości ze zbioru {0, 1} składa się z $2^n$ punktów.

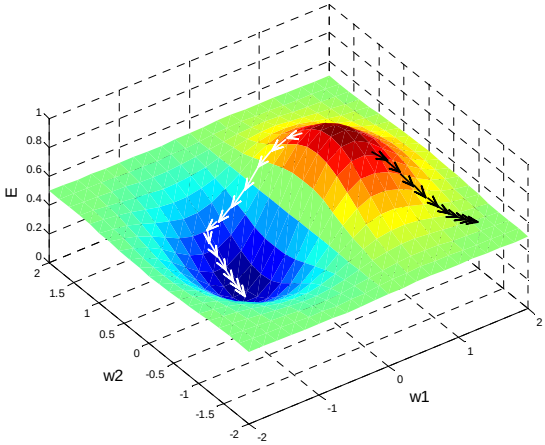
Np. dla $n = 3$ mamy: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

W zadaniach dyskretnych dodanie $k$-wartościowej zmiennej skutkuje $k$-krotnym zwiększeniem przestrzeni rozwiązań.

## Zadania ciągłe

- metoda simpleks dla zadań liniowych,
- metody bezgradientowe – kierunki poszukiwań są równoległe do osi współrzędnych lub wynikają z historii poszukiwań,
- metody gradientowe – kierunek poszukiwań określa minus gradient funkcji celu

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$




- metody newtonowskie – oprócz gradientu korzystają z dodatkowych informacji o pochodnych cząstkowych (hesjan)
- metoda sympleksu nieliniowego (metoda Neldera–Meada)

## Zadania dyskretne

- metody dokładne – przegląd zupełny,
- metody enumeracyjne – programowanie dynamiczne, metoda podziału i ograniczeń,
- metody losowe – Monte Carlo, metoda błądzenia przypadkowego,
- metody heurystyczne – algorytm genetyczny, symulowane wyżarzanie, algorytmy mrówkowe, metoda tabu, ...

Heurystyka to reguły specyficzne dla danego problemu, które mogą pomóc w zgadywaniu jak najlepszego rozwiązania. Reguły te nie gwarantują znalezienia optimum, ale dają możliwość sukcesywnego poprawiania rozwiązania.

Metaheurystyka to sposób generowania reguł dla algorytmów heurystycznych.

Zadania optymalizacji globalnej – zadania, w których funkcja celu ma więcej niż jedno minimum.
Metody optymalizacji globalnej:

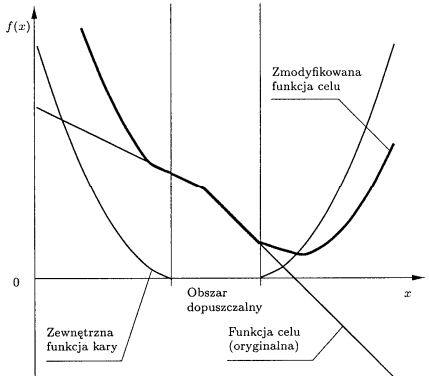
- metody multistartu – uruchamianie algorytmu lokalnego z różnych punktów startowych,
- metody grupowania – naprzemienne kroki optymalizacji lokalnej i grupowania punktów leżących w otoczeniu tych samych minimów lokalnych. Identyfikacja tych grup pozwala usunąć część punktów,
- metody pokryć siatką – identyfikacja oczek o wysokich wartościach funkcji celu i ich zagęszczanie,
- metody heurystyczne i losowe – algorytmy ewolucyjne, symulowane wyżarzanie, ...

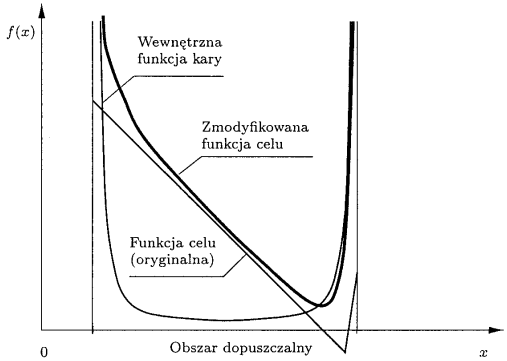
Metody optymalizacji globalnej powinny być odporne na utykanie w minimach lokalnych

# METODY ELIMINACJI OGRANICZEŃ FUNKCJI CELU

Ograniczenia funkcji celu (z wyjątkiem kostkowych) mogą bardzo utrudniać proces przeszukiwania. Metody eliminacji ograniczeń:

- metody transformacji zmiennych i ograniczeń – zadanie dla nowych zmiennych lub w obszarze zmienionych ograniczeń jest łatwiejsze do rozwiązania,
- metody z funkcją kary – do pierwotnej funkcji celu dodaje się składniki kar związanych z przekroczeniem ograniczeń,




- oprócz ww. w AE stosuje się: karę śmierci, metody naprawy, reprezentacje i operatory zapobiegające naruszaniu ograniczeń, dekodery.

# OPTYMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA

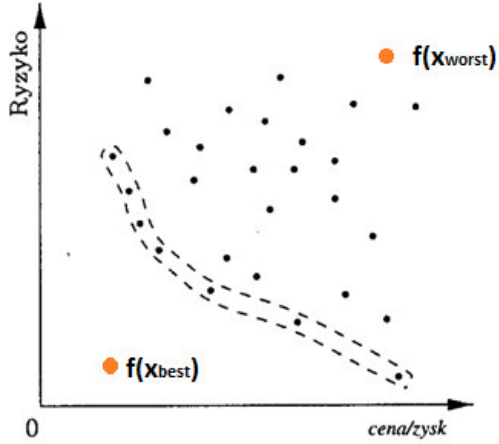
Szukamy rozwiązania optymalizującego jednocześnie kilka kryteriów, często ze sobą niezgodnych lub sprzecznych.

Kompromisem są rozwiązania optymalne w sensie Pareto, tzn. niezdominowane.

Rozwiązanie **x** jest zdominowane, jeśli istnieje rozwiązanie **y**, nie gorsze od **x** względem wszystkich kryteriów:

$$\forall i = 1,\ldots,m \quad f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{y})$$

Metody optymalizacji wielokryterialnej:

- ważone sumowanie kryteriów: $\min \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\mathbf{x})$
- metoda punktu idealnego: $\min \left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{best}) \right\|$
- metoda punktu najgorszych oczekiwań:

$$\max \left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{worst}) \right\|$$